

I Électrostatique

I.1 Accéléromètre

- On considère un plan chargé infini. Il est uniformément chargé en surface, la densité de charge étant positive et notée σ .
 - Quelle est l'unité de σ ?
 - Déterminer le sens et la direction du champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$. De quelle(s) variable(s) dépend-il ?
 - Donner l'expression du champ électrique en fonction de σ et ε_0 .
- On considère un condensateur idéal. Il est constitué de deux plans infinis uniformément chargés. Un plan A d'équation $x = 0$ de densité surfacique $+\sigma$ et un plan B d'équation $x = e$ de densité surfacique $-\sigma$.
 - Quel est le champ entre les plaques ? À l'extérieur des plaques ?
 - On donne $U_{AB} = \int_A^B \vec{E} dx \vec{e}_x$. Exprimer cette tension en fonction des données du problème.
- En réalité un condensateur est constitué de deux plaques finies de surface S mais ils peuvent être considérés comme infinis dans une certaine limite. Donner la capacité du condensateur en fonction de S , ε_0 et e . Quelle est son unité ?
- On considère le système ci-dessous et on admet que $X(t) = -\frac{a(t)}{\omega_0^2}$.
 - Exprimer $U(t)$ en fonction de Q , S et X .
 - Expliquer le fonctionnement de cet accéléromètre.

I.2 Condensateur incliné (Oral Mines-Ponts)

Une version plus guidée est ci-dessous

On considère un condensateur déformé constitué de deux plaques planes de dimensions ℓ et L dont l'une est inclinée d'un angle $\theta \ll 1$ rad par rapport à l'autre. La plus petite distance entre les deux plaques est notée e .

- Déterminer la capacité C de ce condensateur.
- Est ce que le considérer comme un condensateur plan mène à une erreur importante ?

I.3 Condensateur incliné v2

- On considère un plan chargé infini. Il est uniformément chargé en surface, la densité de charge étant positive et notée σ .
 - Quelle est l'unité de σ ?
 - Déterminer le sens et la direction du champ électrostatique en un point $M(x, y, z)$. De quelle(s) variable(s) dépend-il ?
 - Donner l'expression du champ électrique en fonction de σ et d'une constante fondamentale que l'on nommera.
- On considère un condensateur dont les armatures sont de surface $S = \ell L$ et de densité surfacique $\pm\sigma$ où $\sigma > 0$. La tension aux bornes est $U_{AB} = \sigma \frac{e}{\varepsilon_0}$. Quelle est la capacité du condensateur ?
- On incline maintenant d'un angle θ l'armature supérieure.
 - On considère une tranche du condensateur de largeur dx et de hauteur $h(x)$. Donner la capacité dC de cette tranche de condensateur en fonction de ℓ la largeur d'une plaque, $h(x)$, dx et ε_0 .
 - Montrer que $h(x) = x\theta + e$.
 - Quelle est alors la capacité totale du condensateur ?
 - Retrouver l'expression de la capacité du condensateur plan.

- e. Quel est l'écart relatif entre la capacité de notre condensateur et celle d'un condensateur plan ?

I.4 Deux trous noirs (adapté d'un oral X MP)

1. On considère deux charges q et $-q$ situées sur l'axe Ox séparées par une distance $2R$. On place un point $M(r, \theta)$ dans le plan. Déterminer le potentiel électrostatique auquel elle est soumise.
2. Que se passe-t-il si la charge négative devient une charge positive de même valeur ? Donner l'expression de V en fonction de r et θ . Le mettre sous la forme:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2q}{r} + \frac{Q}{2r^3} (3\cos^2(\theta) - 1) \right).$$

Q est le moment dit quadrupolaire dont on donnera l'expression.

3. On suppose alors qu'au lieu d'avoir deux charges q on a deux masses m . Donner, par analogie avec l'électrostatique, l'expression du potentiel gravitationnel auquel est soumise la particule. Quelle est l'expression du moment quadrupolaire Q ici ?
4. Pour pousser l'analogie on peut dire que le potentiel électrique est analogue à la métrique h (grandeur sans dimension qui mesure la courbure de l'espace-temps). On admet que pour un dipôle électrostatique de charges q et $-q$, le potentiel électrique évolue en $\frac{p}{r}$ où p est son moment dipolaire. Ainsi on peut dire, en supposant qu'on a un mouvement périodique de pulsation ω , que

$$h \simeq \frac{K}{r} \frac{d^2 Q}{dt^2} \simeq \frac{K}{r} m \omega^2 R^2.$$

- a. Déterminer une expression de K .
 - b. En déduire une expression de la masse m .
5. Déterminons maintenant la grandeur R . C'est en réalité αR_S où R_S est le *rayon de Schwarzschild*. Un trou noir peut être modélisé comme une sphère telle qu'une particule doit être à la vitesse de la lumière lorsqu'elle en atteint la surface pour s'en échapper. Expliquer l'origine du nom des trous noirs. Déterminer alors R_S en fonction d'une certaine vitesse que l'on définira en fonction notamment de $M = 2m$ la masse totale du système.
 6. On donne $\alpha = 4$, $h \sim 10^{-21}$, $\omega = 250$ rad/s. Ces données ont été mesurées par des l'interféromètre LIGO et la distance entre la Terre et le système binaire de trous noirs est $r = 10^{25}$ m. Calculer la masse des trous noirs. L'exprimer en masses solaires.