

Option Introduction à la cosmologie

Notes du cours de Matthieu Langer

Table des matières

I	Introduction	3
II	Loi de Hubble-Lemaître et observations	3
II-A	Loi de Hubble-Lemaître et effet Doppler	3
II-B	Observationnel	3
II-C	Facteur d'échelle	4
II-D	Plus généralement ?	5
III	Digression sur la relativité générale	5
III-A	Newton et Kepler	5
III-B	Panorama des équations d'Einstein	5
IV	Métriques	6
IV-A	En géométrie euclidienne	6
IV-B	Espace de Minkowski	6
IV-B-1	Définitions	6
IV-B-2	Un produit scalaire ?	7
IV-C	Métrique FLRW	8
IV-C-1	Déplacements élémentaires et espaces	8
IV-C-2	Généralisation à 3D	9
V	Éléments cosmographiques de FLRW	10
V-A	Loi de Hubble-Lemaître	10
V-B	Le redshift cosmologique	11
V-C	Espace-temps FLRW: distance caractéristique	11
VI	Quelques éléments de cosmologie relativiste: dynamique	12
VI-A	Taux d'expansion	12
VI-B	Accélération	12
VI-C	Continuité de l'énergie	13
VI-D	Etude des équations	13
VI-D-1	A propos de P et ε	13
VI-D-2	Étude de l'équation de continuité sur différents exemples	14
VI-D-2-1	Matière	14
VI-D-2-2	Rayonnement	14
VI-D-2-3	Généralisation	14
VI-D-2-4	Bilan	14
VI-D-3	Constante cosmologique	15
VI-D-4	Bilan	15
VI-D-5	Lien avec la géométrie	16
VI-E	Densité d'énergie réduite	16
VI-F	Importance des équations d'état	18
VII	Évolution temporelle du facteur d'échelle	18
VII-A	Pendant l'ère rayonnement	18
VII-B	Pendant l'ère matière	19
VII-C	Pendant l'ère de la constante cosmologique	19
VII-D	Calcul de l'âge de l'univers	19
VII-E	Mais quel modèle considérer pour notre univers ?	20

VIII	Distances en cosmologie	20
VIII-A	Distance radiale	20
VIII-A-1	Distance radiale comobile	20
VIII-A-2	Distance radiale physique	21
VIII-B	Horizons cosmologiques	21
VIII-B-1	Horizon des particules et distance de causalité	21
VIII-B-2	Horizon pour un univers $E(a) \propto a^{-n}$	22
VIII-B-3	Horizon des événements cosmologiques	22
VIII-C	Distances mesurables en cosmologie	24
VIII-C-1	Distance angulaire	24
VIII-C-2	Distance de luminosité	24
VIII-C-3	Magnitude	25
VIII-C-4	Comparaison des différentes distances	26
IX	Problèmes du modèle	26
IX-A	Défauts topologiques	27
IX-A-1	Brisures de symétrie	27
IX-A-2	Transitions de phase	27
IX-B	Problème de l'horizon cosmologique	28
IX-C	Problème de la platitude	28
IX-D	L'inflation primordiale: une solution aux 3 problèmes ?	29
IX-D-1	Définition de l'inflation primordiale	29
IX-D-2	Des exemples de potentiel	30
X	Éléments de formation des structures	30
X-A	Instabilité gravitationnelle de Jeans (1900 - 1905)	30

I Introduction

II Loi de Hubble-Lemaître et observations

II-A Loi de Hubble-Lemaître et effet Doppler

En cosmologie, l'indice 0 signifie que l'on parle d'une grandeur mesurée *aujourd'hui*.

Loi 2.1.1 (Loi de Hubble - Lemaître): On note $v(t)$ la vitesse d'éloignement (vitesse de récession) perçue par l'observateur et $d(t)$ la distance entre la source et l'observateur et on a:

$$v(t_0) = H_0 \times d(t_0) \quad (1)$$

où H_0 est la **constante de Hubble**.

Initialement $v(t_0)$ était interprétée comme la vitesse due à l'*éloignement physique* de la source, déduite d'un effet Doppler cinématique. Ce dernier semblait être à l'origine d'un décalage spectral vers le rouge accessible à la mesure. C'est le *redshift*:

Définition 2.1.1 (Redshit): On définit le redshift z par:

$$z + 1 = \frac{\lambda_{\text{obs}}}{\lambda_{\text{ref}}} \quad (2)$$

où λ_{ref} est connu.

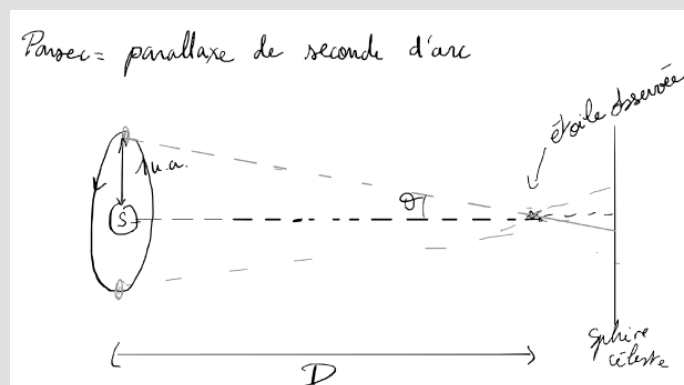
Cette définition étant différente de celle qu'ils avaient initialement imaginée: $z + 1 = \frac{v}{c}$. Lemaître avait déjà montré que ce n'était pas un déplacement, et donc que cette définition était invalide.

On peut définir la loi de Hubble-Lemaître à un instant quelconque:

$$v(t) = H(t)d(t). \quad (3)$$

II-B Observationnel

Définition 2.2.1 (Parsec): Le parsec correspond à la parallaxe de seconde d'arc.



On dit que $D = 1\text{pc}$ quand $\theta = 1 \text{ arcsec}$. Anecdote: cela équivaut à $\frac{648000}{\pi} \text{ ua}$.

On peut observer différents éléments avec nos télescopes:

- L'univers tardif: galaxies et distribution des structures (ce qui est plus grand qu'une galaxie). Il est statistiquement homogène et isotrope à grande échelle (≥ 70 Mpc).
- Le rayonnement fossile: aussi appelé CMB (Cosmic Microwave Background), il est isotrope et homogène. Néanmoins son intensité est faible par rapport à la Voie Lactée. C'est comme regarder une luciole dans la lumière d'un phare...

Néanmoins, les propriétés générales de la façon dont on observe l'univers sont regroupées en un principe, le principe cosmologique:

Principe 2.2.1 (Principe cosmologique): L'univers apparaît comme identique dans toutes les directions (isotropie) à n'importe quel observateur.

Ce principe montre que la Terre n'occupe pas de lieu particulier dans l'univers, on l'appelle donc aussi le *principe de médiocrité*.

Exo Montrer que la loi de Hubble-Lemaître est parfaitement compatible avec le principe cosmologique, c'est à dire qu'il n'existe pas de centre.

II-C Facteur d'échelle

Soit A une galaxie, munie de son redshift z_A . D'après (1),

$$\overrightarrow{v_A(t)} = H(t)\overrightarrow{d_A(t)} \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\overrightarrow{d_A} = H(t)\overrightarrow{d_A} \quad (4)$$

D'où

$$\overrightarrow{d_A(t)} = \exp\left(\int_0^t H(t')dt'\right)\overrightarrow{\chi_A}. \quad (5)$$

où $\overrightarrow{\chi_A}$ est la constante d'intégration.

Définition 2.3.1 (Facteur d'échelle et distance comobile): On pose $a : t \mapsto \exp\left(\int_0^t H(t')dt'\right)$. On appelle cette grandeur le **facteur d'échelle**. (En pratique, on n'utilise jamais son expression).

On définit également χ_A définit la **distance comobile** entre A et nous à un instant de référence choisi, ici t_0 , tel que:

$$\boxed{a(t_0) = a_0 = 1}$$

On a ainsi le lien entre la distance "classique" et la distance comobile:

$$\overrightarrow{d_A(t)} = a(t)\overrightarrow{\chi(A)} \quad (6)$$

Remarque: D'après ci-dessus, on voit que

$$\boxed{\frac{\dot{a}}{a} = H(t)} \quad \text{et} \quad \frac{\dot{a}}{a}|_{t=t_0} = H_0 \quad (7)$$

De plus, $\overrightarrow{d_A}(t_1) = a(t_1)\overrightarrow{\chi_A}$ et à $t_2 > t_1$, $\overrightarrow{d_A}(t_2) = a(t_2)\overrightarrow{\chi_A}$.

Il vient ainsi,

$$\frac{d_A(t_1)}{d_A(t_2)} = \frac{a(t_1)}{a(t_2)} \text{ et en particulier, } \frac{d_A(t_1)}{d_A(t_0)} = a(t_1). \quad (8)$$

Remarque : $\vec{a}$ ne dépend que du temps, la dilation est donc la même dans toutes les directions.

II-D Plus généralement ?

D'une manière plus complète, on a

$$\overrightarrow{v_{\text{obs}}}(t) = \overrightarrow{v_{\text{rec}}}(t) + \overrightarrow{v_{\text{particulière}}}(t) \quad (9)$$

où

- $\overrightarrow{v_{\text{obs}}}$ est la vitesse observée et mesurée
- $\overrightarrow{v_{\text{rec}}} = H(t)\overrightarrow{d_A}(t)$, représente l'expansion de l'espace
- $\overrightarrow{v_{\text{particulière}}}$ représente le vrai déplacement, effet Doppler cinétique

Quant à la constante de Hubble, H_0 , on la mesure souvent mais les résultats ne sont pas vraiment compatibles entre eux... Les barres d'erreur elles-mêmes ne sont pas comptables.

On s'accorde à peu près sur la valeur: $H_0 = 100h \text{ km/s/Mpc}$ où $h \sim 0.7$.

III Digression sur la relativité générale

III-A Newton et Kepler

La force gravitationnelle donnée par Newton dérive d'un potentiel gravitationnel φ . En notant ρ la distribution de masse, on a l'équation de Poisson :

$$\Delta\varphi = 4\pi G\rho \quad (10)$$

Que se passe-t-il si $\rho = 0$? Il n'y a *instantanément* plus de gravité. C'est étrange qu'il n'y ait pas de dépendance en temps. Pourtant Newton et Kepler fonctionnent bien de manière générale. Sauf pour Mercure, planète possédant la plus forte attraction gravitationnelle. Les trajectoires des planètes ne sont pas fermées, le périhélie se déplace. C'est la mesure de ce décalage qui est inadéquate avec la théorie pour Mercure.

Il faut compléter ce que dit Newton, c'est là que vient la relativité générale.

La relativité restreinte étudie l'espace-temps à travers l'*espace-temps de Minkowski*. Et la relativité générale est une généralisation (waouh) de la relativité restreinte à travers la théorie métrique de l'espace-temps.

III-B Panorama des équations d'Einstein

Les équations d'Einstein sont au nombre de 16, rassemblées en une seule:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (11)$$

où on note parfois $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$. C'est le **tenseur d'Einstein** (hautement non linéaire) défini à partir de $R_{\mu,\nu}$, *tenseur de Ricci*, qui est la trace partielle de $R_{\rho\gamma\delta}^\alpha$, *tenseur de Riemann*. Il décrit comment la courbure se déplace quand je me déplace sur cette dernière. De plus $R = \text{tr}(R_{\alpha,\beta})$ est appelé *scalaire de Ricci*.

On a $K = \frac{8\pi G}{c^4}$ pour retrouver Newton lorsqu'on se place à la limite de la relativité générale.

$g_{\mu\nu}$ est un tenseur métrique qui caractérise la géométrie de l'espace. C'est-à-dire comment définir/mesurer les angles et les distances.

Λ et κ sont deux constantes. Λ est la **constante cosmologique** que Einstein a rajouté dans sa formule car un des cas limites lui déplaisait. On en saura plus plus tard.

Enfin, $T_{\mu\nu}$ représente les *composantes du tenseur énergie-impulsion*. Dans le cadre d'un fluide parfait, on a $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon, p, p, p)$ avec

- ε la densité d'énergie avec $[\varepsilon] = \frac{[E]}{[V]} = ML^{-1}T^{-2}$.
- p est la pression avec $[p] = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = ML^{-1}T^{-2}$.

2è et 3è piliers du modèle cosmologique: La relativité générale comme théorie de l'espace-temps, le reste de la physique est valable partout et de tout temps.

IV Métriques

IV-A En géométrie euclidienne

Produit scalaire $\vec{A}$ et $\vec{B}$ dans un espace $\mathbb{R}^3$: $(\vec{A}, \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} = (A_1 A_2 A_3) \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}$.

Et on définit un scalaire comme un objet que est invariant par translation et rotation.

Définissons une base $\vec{A} = \begin{pmatrix} A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix}$ et $\vec{B} = \begin{pmatrix} B^1 \\ B^2 \\ B^3 \end{pmatrix}$.

On a

$$\begin{aligned} (\vec{A}, \vec{B}) &= A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 \\ &= \sum_{i=1}^3 A_i B^i \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} A^i B^j \end{aligned} \tag{12}$$

δ est le tenseur métrique de la géométrie euclidienne et ses composantes sont les δ_{ij} .

Remarque : convention de sommation implicite d'Einstein Tout indice répété dans un monome implique qu'on a sommé sur lui. Exemple: $\delta(\vec{dr}, \vec{dr}) = (\vec{A}, \vec{B}) = \delta_{ij} A^i B^j$. Dans ce cadre $\delta_{ii} = N$, le nombre de dimensions.

IV-B Espace de Minkowski

IV-B-1 Définitions

L'**espace de Minkowski** M_4 est un espace à 4 dimensions, une supplémentaire pour le temps.

Définition 4.2.1.1 (Quadrivecteurs): C'est un élément de l'espace-temps de Minkowski, noté:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} \quad (13)$$

On note les événements de cette façon avec $A^0 = ct$ puis $(A^1, A^2, A^3) = (x, y, z)$.

Le tracé de l'objet lorsqu'il voyage dans l'espace-temps de Minkowski est appelé la **ligne d'univers** de ce dernier. On peut alors étudier le vecteur déplacement élémentaire sur la ligne d'univers, définit comme suit:

$$\tilde{dr} = \begin{pmatrix} cdt \\ dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dr^0 \\ dr^1 \\ dr^2 \\ dr^3 \end{pmatrix} \quad (14)$$

On l'appelle également *événement élémentaire cartésien*.

De manière générale, pour noter les coordonnées d'un élément de M_4 , on utilise des indices grecs pour indiquer que cela commence à 0. Ici: dr^μ , $\mu \in \{0, 1, 2, 3\}$.

IV-B-2 Un produit scalaire ?

Soient deux événements $\tilde{\Omega}_1 = \begin{pmatrix} \Omega_1^0 \\ \Omega_1^1 \\ \Omega_1^2 \\ \Omega_1^3 \end{pmatrix}$ et $\tilde{\Omega}_2 = \begin{pmatrix} \Omega_2^0 \\ \Omega_2^1 \\ \Omega_2^2 \\ \Omega_2^3 \end{pmatrix}$.

Définition 4.2.2.1 (Produit (pseudo)-scalaire dans l'espace de Minkowski:): On définit le produit scalaire entre $\tilde{\Omega}_1$ et $\tilde{\Omega}_2$, η :

$$\begin{aligned} \eta(\tilde{\Omega}_1, \tilde{\Omega}_2) &:= \Omega_1^0 \Omega_2^0 - \Omega_1^1 \Omega_2^1 - \Omega_1^2 \Omega_2^2 - \Omega_1^3 \Omega_2^3 \\ &= \eta_{\alpha\beta} \Omega_1^\alpha \Omega_2^\beta \end{aligned} \quad (15)$$

où $\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$

Pour les déplacements élémentaires on écrit:

$$\eta(\tilde{dr}, \tilde{dr}) = \eta_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta =: ds^2 \quad (16)$$

On peut également écrire: $ds^2 = \eta_{\alpha\beta} dr^\alpha dr^\beta = (cdt)^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

Les signes devant les dimensions spatiales et temporelles sont appelés la *signature* (cf cours de relativité restreinte, et formes quadratiques). Le choix de signature est parfaitement arbitraire, en cosmologie on préfère (par habitude uniquement) utiliser $(-1, +1, +1, +1)$. On écrira donc la métrique de Minkowski:

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (17)$$

Et on a

$$\begin{aligned}
 ds^2 &= -c^2 dt^2 + \vec{dr}^2 \\
 &= -c^2 dt^2 + \vec{dl}^2
 \end{aligned}
 \tag{18}$$

IV-C Métrique FLRW

IV-C-1 Déplacements élémentaires et espaces

Définition 4.3.1.1 (Espaces euclidiens et non euclidiens): On peut dire qu'un espace est **euclidien** lorsque, si l'on y trace un triangle, la somme des angles est égale à 180° . Par exemple, la surface d'un ballon n'est pas un espace euclidien (la somme des angles sera supérieure à 180°): c'est un espace 2D **sphérique**. On a aussi les espaces **hyperboloïdes**¹.

D'après le principe cosmologique, l'univers est homogène et isotrope. On a donc envie d'utiliser les coordonnées cartésiennes. Examinons la sphère 2D, S^2 de rayon (de courbure) R , mais par simplicité on place la sphère dans un espace 3D, euclidien, muni des coordonnées cartésiennes. (La coordonnée supplémentaire est un *artefact de commodité*.)

Plongement: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Une des coordonnées est superflue, on peut l'écrire en fonction des autres: $z^2 = R^2 - (x^2 + y^2) \Rightarrow z dz = -(x dx + y dy)$.

D'où

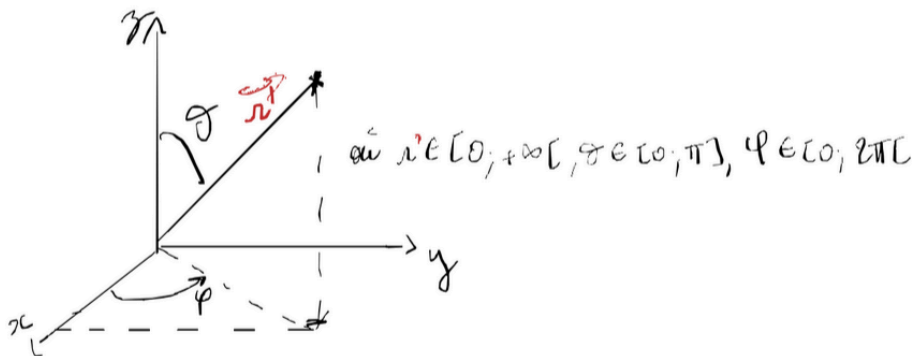
$$dz = -\frac{x dx + y dy}{\sqrt{R^2 - (x^2 + y^2)}}. \tag{19}$$

Après calculs, tout déplacement élémentaire $d\ell$ dans S^2 s'écrit

$$d\ell^2 = f(x, y) dx^2 + g(x, y) dy^2 + \frac{2xy}{R^2 - (x^2 + y^2)} dx dy. \tag{20}$$

Le terme diagonal est non nul, et il peut y avoir une singularité ! On a fait un mauvais choix de coordonnées².

Espace sphérique:



On pose maintenant $x = r' \cos(\varphi)$ et $y = r' \sin(\varphi)$ avec $0 \leq r' \leq R$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. Cette fois-ci on a

¹Cela sera plus détaillé dans la suite.

²En réalité, on peut avoir des singularités mathématiques sans que cela pose vraiment un problème. Par exemple, l'horizon des événements d'un trou noir est une singularité. Physiquement on peut effectivement ne pas en sortir mais on s'en approche de l'extérieur sans qu'il ne se passe rien, on le traverse sans souci.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = r'^2 \Rightarrow xdx + ydy = r' dr' \\ dx^2 + dy^2 = dr'^2 + r'^2 d\varphi^2 \end{cases}. \quad (21)$$

Puis en utilisant (19): $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr'^2 + r'^2 d\varphi^2 + \frac{r' dr'}{R^2 - r'^2}$.

Finalement, on a

$$d\ell^2 = \frac{1}{1 - \left(\frac{r'}{R}\right)^2} dr'^2 + r'^2 d\varphi^2. \quad (22)$$

Espace euclidien:

$$d\ell^2 = dr'^2 + r'^2 d\varphi^2 \quad (23)$$

Espace hyperbolique: On note $\mathcal{H}^2$ l'hperboloïde 2D, que l'on plonge dans un espace à 3D Lorentzien³ avec : $x^2 + y^2 - z^2 = -R^2$ id est $d\ell^2 = dx^2 + dy^2 - dz^2$. On a finalement, après calculs:

$$d\ell^2 = \frac{dr'^2}{1 + \left(\frac{r'}{R}\right)^2} + r'^2 d\varphi^2 \quad (24)$$

Bilan:

On pose $r = \frac{r'}{R}$ (on remarque au passage que $[r] = 1$), et on a:

Espace	Déplacement élémentaire $d\ell^2$
S^2	$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$
$E^2 = \mathbb{R}^2$	$d\ell^2 = R^2 (dr^2 + r^2 d\varphi^2)$
$\mathcal{H}^2$	$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 + r^2} + r^2 d\varphi^2 \right)$

Ce qui peut se résumer en :

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\varphi^2 \right) \quad (25)$$

où $k = \begin{cases} 1 & \text{(sphérique)} \\ 0 & \text{(euclidien)} \\ -1 & \text{(hyperbolique)} \end{cases}$.

IV-C-2 Généralisation à 3D

On généralise à 3 dimensions par:

$$d\ell^2 = R^2 \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (26)$$

³??

$$\text{où } k = \begin{cases} 1 & (\text{sphérique}) \\ 0 & (\text{euclidien}) \\ -1 & (\text{hyperbolique}) \end{cases}.$$

Définition 4.3.2.1 (Rayon de courbure): Pour $k = \pm 1$, R est appelé le rayon de courbure.

Remarques importantes:

- pour $k = 0$ ou $k = -1$, $r \geq 0$.
- pour $k = 1$, $r \in [0, 1[$.

Résultat 4.3.2.1 (Métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker):

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + R^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right) \quad (27)$$

où $k \in \{-1, 0, 1\}$.

Cette métrique peut s'écrire sous une autre forme en posant $d\left(\frac{\chi}{R_0}\right)^2 = \frac{dr^2}{1 - kr^2}$ où $R_0 = R(t_0) = R_0 a(t_0)$ et χ est la distance radiale. On obtient dans ce cas

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) (d\chi^2 + f_k^2(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)) \quad (28)$$

$$\text{avec } f_{k(\chi)} = R_0 \begin{cases} \sin\left(\frac{\chi}{R_0}\right) \\ \frac{\chi}{R_0} \\ \sinh\left(\frac{\chi}{R_0}\right) \end{cases} \quad \text{pour } k = 1, k = 0, k = -1.$$

Exercice⁴ Examinons tous les points à χ fixé sur S^3 (hypersphère).

1. Quelle est la métrique de cette sphère ? à t fixé.
2. Quel est l'élément de surface dS_k ?
3. Quelle est la surface S_k ? Étudier les limites de $S_{k(\chi)}$ en fonction du rapport $\frac{\chi}{R_0}$.
4. Quel est le volume $V_{k(\chi)}$ défini pour $S_{k(\chi)}$? Étudier les limites de $V_{k(\chi)}$ en fonction du rapport $\frac{\chi}{R_0}$.

V Éléments cosmographiques de FLRW

V-A Loi de Hubble-Lemaître

Notons $D(t)$ la distance physique à un instant t entre une galaxie à la coordonnée radiale comobile χ_s et nous, situés en $\chi = 0$. On a $D(t) = a(t) \Delta\chi$ avec $\Delta\chi = \int_0^{\chi_0} d\chi$. On en déduit la vitesse,

⁴Je mettrai la correction plus tard.

$$\begin{aligned}\frac{dD(t)}{dt} &= \frac{d}{dt}(a(t)\chi_s) = \dot{a}\chi_s \\ &= \dot{a}\frac{D(t)}{a(t)} = H(t)D(t)\end{aligned}\quad (29)$$

D'où, à $t = t_0$

$$\boxed{v(t_0) = H_0 D(t_0)} \quad (30)$$

V-B Le redshift cosmologique

On rappelle que par définition on a

$$\boxed{z = \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{ém}} - 1} \quad (31)$$

et que tous les photons et toutes les particules sans masse se déplacent avec $ds^2 = 0$. Ce qui se résume par (28) à $ds^2 = 0 = -c^2 dt^2 + a^2(t) d\chi^2$, id est:

$$d\chi = c \frac{dt}{a(t)} \quad (32)$$

C'est à dire $\chi_S = \int_0^{\chi_S} d\chi = c \int_{t_{émission}}^{t_{observation}} \frac{dt}{a(t)}$.

Donc pour les photons sur le front d'onde suivant, la distance comobile radiale parcourue est la même ! On a $\chi_S = c \int_{t_{ém} + \delta t_{ém}}^{t_{obs} + \delta t_{obs}} \frac{dt}{a(t)}$.

On pose maintenant $F(x) = \int_?^x \frac{dt}{a(t)}$ et on a par égalité des distances comobiles radiales:

$$F(t_{obs} + \delta t_{obs}) - F(t_{ém} + \delta t_{ém}) - F(t_{obs}) + F(t_{ém}) = 0.$$

Ce qui revient en prenant δt_{obs} et $\delta t_{ém}$ très petits, puis en prenant l'expression au premier ordre:

$$\left. \frac{dF}{dt} \right|_{t_{obs}} \delta t_{obs} - \left. \frac{dF}{dt} \right|_{t_{ém}} \delta t_{ém} = 0 \quad (33)$$

Ou encore, $\frac{(\delta t)_{obs}}{a(t_{obs})} = \frac{(\delta t)_{ém}}{a(t_{ém})}$ où $\delta t_i = \nu_i^{-1} = \frac{\lambda_i}{c}$. Donc,

$$\frac{\lambda_{obs}}{a(t_{obs})} = \frac{\lambda_{ém}}{a(t_{ém})} \Leftrightarrow \frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{ém}} = \frac{a(t_{obs})}{a(t_{ém})} = 1 + z \quad (34)$$

Plus généralement, on a $t_{obs} = t_0$ et $t_{ém} = t$ et $a(t_{obs}) = a(t_0) = 1$. D'où

$$\boxed{1 + z = \frac{1}{a(t)}} \quad (35)$$

La mesure de z donne donc accès au facteur d'échelle ! Par exemple, si on mesure $z = 1$ pour le redshift d'une galaxie, cela signifie que $a = \frac{1}{2}$ et donc que l'objet était deux fois plus près.

V-C Espace-temps FLRW: distance caractéristique

c est une vitesse, est donc homogène à $L.T^{-1}$ et $H_0 = \left. \frac{\dot{a}}{a(t)} \right|_{t_0}$, c'est le taux d'évolution de a et ainsi $[H_0] = T^{-1}$.

On peut ainsi définir une taille caractéristique à partir de ces deux grandeurs.

Définition 5.3.1 (Rayon de Hubble): On définit une **taille caractéristique** appelée *Rayon de Hubble* par:

$$R_{H_0} = \frac{c}{H_0}. \quad (36)$$

VI Quelques éléments de cosmologie relativiste: dynamique

En principe, tout l'information se trouve dans les équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (37)$$

C'est une équation *ultranonlinéaire* dont l'inconnue est $g_{\mu\nu}$, tenseur métrique. Mais d'après le principe cosmologique⁵, c'est le tenseur métrique de FLRW. On peut donc réduire les équations d'Einstein aux **équations de Friedmann**.

De plus on a $T_{\mu\nu} = \text{diag}(\varepsilon, p, p, p)$ (11).

VI-A Taux d'expansion

Résultat 6.1.1 (Première équation de Friedmann - Taux d'expansion):

On note $R(t) = a(t)R_0$ et $\varepsilon(t)$ la somme des densités d'énergie des "fluides" contenus dans l'univers. On a:

$$H^2(t) = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) + \frac{\Lambda c^2}{3} - k\frac{c^2}{R^2(t)} \quad (38)$$

On remarque que la géométrie joue un rôle.

VI-B Accélération

Résultat 6.2.1 (Deuxième équation de Friedmann - Accélération de l'expansion):

On note p la somme des pressions de tous les fluides présents dans l'univers. On a

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon(t) + 3p(t)) + \frac{\Lambda c^2}{3} \quad (39)$$

On remarque qu'ici, la géométrie ne joue aucun rôle ! Cette dernière n'est donc "que" le cadre, et n'a pas d'énergie associée.

De plus, dans cette équation, si $\Lambda = 0$, ε et p totaux donnent une... *accélération négative* ! Il y a donc autre chose, quelque chose que l'on peut qualifier d'exotique.

⁵?

VI-C Continuité de l'énergie

Résultat 6.3.1 (Troisième équation de Friedmann - Continuité de l'énergie):

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + p) = 0 \quad (40)$$

On rappelle que $H = H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)}$.

Remarque: La troisième équation de Friedmann n'est pas indépendante des deux premières. On peut la retrouver à partir des deux autres.

On fait l'hypothèse que l'on a la *même équation pour chaque fluide*. C'est à dire que $\forall i \in \{\text{matière, photons, neutrinos, axions, matière noire, énergie noire...}\}$ on a $\dot{\varepsilon}_i + 3H(\varepsilon_i + p_i) = 0$.

Néanmoins, on a dorénavant 3 inconnues et seulement deux équations linéaire indépendante, une quatrième équation est donc nécessaire: ce sont les **équations d'état**. Elles font le lien entre p_i et ε_i pour tout $i \in \{\text{fluides}\}$.

VI-D Etude des équations

VI-D-1 A propos de P et ε

Exemples :

- **Rayonnement, cas relativiste:**

$$P_r = \frac{1}{3}\varepsilon_r \quad (41)$$

- **Cas non relativiste:** matière froide (fluide dont l'énergie est dominée par l'énergie de masse: $E = mc^2$).

Dans ce cas: si on a $p_m \ll \varepsilon_m$ alors

$$p_m = 0 \quad (42)$$

Montrons-le: pour une particule de masse m , $E^2 = m^2c^4 + \vec{p}^2c^2$ où $\vec{p}$ est l'impulsion avec $\vec{p} = \gamma m \vec{v}$ ou encore $E = \gamma mc^2$.

Quand $\beta \ll 1$ ie $v \ll c$, $E \sim mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + \dots$

... slash slash A COMPLETER

A l'échelle de l'univers, la pression de la matière est donc négligeable et n'a pas vraiment d'importance. Mais attention ! Localement, elle a beaucoup d'importance. La matière entendue par le m est la somme de CDM (Cold Dark Matter) et des baryons (on néglige les leptons). On a donc

$$\varepsilon_{\text{matière}} = \varepsilon_{\text{CDM}} + \varepsilon_{\text{Br}}.$$

De plus, d'une façon plus générale:

Définition 6.4.1.1 (Equation d'état): Pour tout $i \in \{\text{fluides}\}$ on a

$$P_i = w_i \varepsilon_i \quad (43)$$

et on appelle w_i **équation d'état** par métonymie. *A priori* on a $w_i = w_i(t)$. Mais, dans la pratique, pour un fluide donné, $w_i = \text{cst}$ sauf exceptions.

VI-D-2 Étude de l'équation de continuité sur différents exemples

VI-D-2-1 Matière

Appliquons la 3^e équation de Friedmann dans le cas de la matière. On a précédemment montré que on peut considérer $p_m = 0$ ($w_m = 0$).

Ainsi on a:

$$\dot{\varepsilon}_m + 3H\varepsilon_m = 0 \quad (44)$$

$$\text{Puis } \frac{\dot{\varepsilon}_m}{\varepsilon_m} = -3\frac{\dot{a}}{a} \Rightarrow \varepsilon_{m(a)} = \varepsilon_{m,0}a^{-3}$$

Ou encore

$$\boxed{\varepsilon_m(t) = \varepsilon_{m,0}a^{-3}(t)}. \quad (45)$$

Il est peu étonnant que ε_m évolue en L^{-3} . En effet, c'est la densité d'énergie de "matière". En notant N le nombre de photons, on a:

$$\varepsilon_m = \frac{mc^2 N}{V} \quad (46)$$

VI-D-2-2 Rayonnement

On a $w_r = \frac{1}{3}$.

$$\text{On a ainsi } \dot{\varepsilon}_r + 3H(\varepsilon_r + P_r) = 0 \Leftrightarrow \dot{\varepsilon}_r + 3H\left(\varepsilon_r + \frac{1}{3}\varepsilon_r\right) = 0$$

$$\text{D'où } \dot{\varepsilon}_r + 4H\varepsilon_r = 0.$$

C'est à dire,

$$\boxed{\varepsilon_r(t) = \varepsilon_{r,0}a^{-4}}. \quad (47)$$

De même, on s'attendait à ce résultat. Car

$$\varepsilon_m = \frac{Nh\nu}{V} \quad (48)$$

ce qui évolue en $\frac{1}{\lambda V}$, ie en $\frac{1}{a \times a^3} = a^{-4}$.

Remarque: On remarque ainsi que ε_r décroît plus vite que $\varepsilon_{\text{matière}}$.

VI-D-2-3 Généralisation

Avec $P_i = w_i \varepsilon_i$ et l'équation de continuité, on trouve, de manière générale:

$$\boxed{\varepsilon_i(t) = \varepsilon_{i,0}a^{-3(1+w_i)}}. \quad (49)$$

VI-D-2-4 Bilan

Fluide	w	Évolution ε
Matière	0	a^{-3}
Rayonnement	$\frac{1}{3}$	a^{-4}
Constante cosmologique	-1	Constante: $\varepsilon_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G}$

VI-D-3 Constante cosmologique

Quelle est l'origine de la constante cosmologique ? Einstein l'a mise dans ses équations en 1917.

On peut réécrire l'équation d'Einstein comme suit:

$$\begin{aligned} R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} &= \frac{8\pi G}{3c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} \\ &= \frac{8\pi G}{3c^4}\tilde{T}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (50)$$

C'est comme si Λ était un fluide. On peut donc lui associer une énergie ε_Λ et/ou une pression P_Λ .

On peut ainsi écrire les équations de Friedmann comme suit:

$$\begin{cases} \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon - k\frac{c^2}{R^2(t)} \\ \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon + 3P) \end{cases} \quad (51)$$

où $\varepsilon = \varepsilon_m + \varepsilon_r + \dots + \varepsilon_\Lambda$ et $P_\Lambda = P_m + P_r + \dots + P_\Lambda$.

Déterminons l'expression de ε_Λ . On écrit l'égalité des deux versions de l'équation de Friedmann:

$$\frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon + \frac{\Lambda c^2}{3} = \frac{8\pi G}{3c^2}(\varepsilon + \varepsilon_\Lambda) \quad (52)$$

Et on a ainsi

$$\boxed{\varepsilon_\Lambda = \frac{\Lambda c^4}{8\pi G} = \text{constante}} \quad (53)$$

Qu'en est-il de l'équation de continuité pour Λ ?

Comme ε_Λ est une constante elle devient simplement $3H(\varepsilon_\Lambda + P_\Lambda) = 0 \Rightarrow P_\Lambda = -\varepsilon_\Lambda$

Ainsi on a $w_\Lambda = -1$.

VI-D-4 Bilan

Résultat 6.4.4.1 (Equations de Friedmann):

Première équation:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2}\varepsilon(t) - k\frac{c^2}{R^2(t)} \quad (54)$$

Deuxième équation:

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3c^2}(\varepsilon(t) + 3P(t)) \quad (55)$$

Troisième équation:

$$\dot{\varepsilon} + 3H(\varepsilon + P) = 0 \quad (56)$$

VI-D-5 Lien avec la géométrie

À la date $t = t_0$, la première équation est

$$H_0^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - k \frac{c^2}{R_0^2} \quad (57)$$

Ce qui revient à

$$kc^2 = R_0^2 \left(\frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_0 - H_0^2 \right) \quad (58)$$

D'où

$$kc^2 = R_0^2 H_0^2 \left(\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_c} - 1 \right) \quad (59)$$

où $\varepsilon_c = \frac{3H_0^2 c^2}{8\pi G}$ (**énergie critique**).

Résultat 6.4.5.1 (Énergie critique et géométrie): On rappelle que $k \in \{-1, 0, 1\}$ et $\varepsilon_0 = \varepsilon(t_0)$.

- $\varepsilon_0 > \varepsilon_c \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow$ géométrie **sphérique**
- $\varepsilon_0 = \varepsilon_c \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow$ géométrie **euclidienne**
- $\varepsilon_0 < \varepsilon_c \Leftrightarrow k = -1 \Leftrightarrow$ géométrie **hyperbolique**

VI-E Densité d'énergie réduite

On peut réécrire la première équation de Friedmann comme:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \times \varepsilon_c \times \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c} - k \frac{c^2}{R^2(t)} \quad (60)$$

Qu'on peut réécrire

$$H^2(t) = H_0^2 \Omega(t) - k \frac{c^2}{R^2(t)} \quad (61)$$

Définition 6.5.1 (Densité d'énergie réduite):

On appelle densité d'énergie réduite $\Omega : t \mapsto \Omega(t)$ défini par:

$$\Omega(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon_c} \quad (62)$$

On note $\Omega_k(t)$, la densité d'énergie réduite du fluide k (dépendant donc de $\varepsilon_k(t)$), et $\Omega_{k,0} = \frac{\varepsilon_{k,0}}{\varepsilon_c}$.

Dans l'équation (61) $\Omega(t) = \sum_i \Omega_{i(t)}$, avec les densités d'énergie réduite pour chaque fluide.

On peut réécrire (45), (47) et (53) en fonction des Ω :

$$\begin{cases} \Omega_m(t) = \Omega_{m,0} a^{-3} \\ \Omega_r(t) = \Omega_{r,0} a^{-4} \\ \Omega_\Lambda = \text{constante} \end{cases} \quad (63)$$

De même pour (49) :

$$\boxed{\Omega_i(t) = \Omega_{i,0} a^{-3(1+w_i)}} \quad (64)$$

De plus avec le rayon de Hubble $R_{H_0} = \frac{c}{H_0}$, on peut continuer à “simplifier” l’écriture de la première équation de Friedmann:

$$H^2(t) = H_0^2 \Omega(t) - k \frac{c^2}{R^2(t)} = H_0^2 \left(\Omega(t) - k \frac{c^2}{R^2(t) H_0^2} \right) = H_0^2 \left(\Omega(t) - k \left(\frac{R_{H_0}}{R(t)} \right)^2 \right)$$

Par simple désir de visibilité, on pose $\Omega_k(t) = -k \frac{(R_{H_0})^2}{R^2(t)}$ (qui évolue en a^{-2}).

Nota Bene: Tant qu’on y est on peut aussi écrire $\Omega_k(t) = \Omega_{k,0} a^{-2}$ où $\Omega_{k,0} = -k \frac{(R_{H_0})^2}{R_0^2}$.

Finalement, on peut écrire la **première équation de Friedmann** comme:

$$\boxed{H^2(t) = H_0^2 (\Omega(t) + \Omega_k(t))} \quad (65)$$

On peut en déduire une relation entre Ω_0 et $\Omega_{k,0}$:

$$\Omega_0 = 1 - \Omega_{k,0}. \quad (66)$$

De même, on a $P_i = w_i \varepsilon_i = w_i \varepsilon_c \Omega_i$ et on peut écrire la **deuxième équation de Friedmann** comme:

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2} H_0^2 \sum_i \Omega_i(t) (1 + 3w_i)} \quad (67)$$

Remarque: $H_0, \Omega_{k,0}, \Omega_{m,0}, \Omega_{r,0}, \Omega_\Lambda$ sont des **paramètres cosmologiques**.

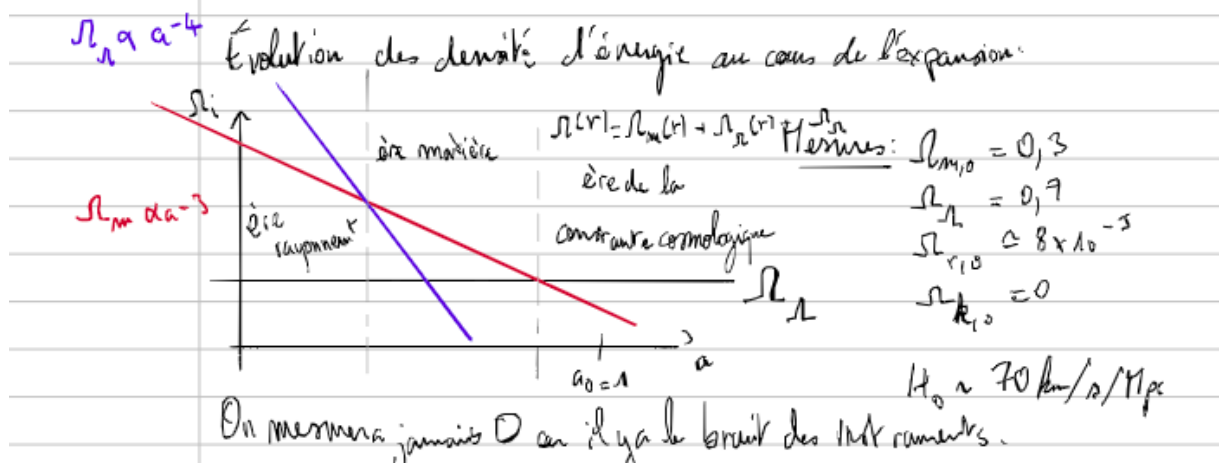


Figure 3: Évolution des densités d'énergie au cours de l'expansion.

Égalité matière rayonnement: le moment où $\Omega_m(t)$ et $\Omega_r(t)$ contribuent à parts égales à $H(t)$.

Égalité: On pose $a_{eq} = a(t_{eq})$ tel que $\Omega_m(a_{eq}) = \Omega_\Lambda(a_{eq})$.

C'est à dire $\Omega_{m,0} a_{\text{eq}}^{-3} = \Omega_{r,0} a_{\text{eq}}^{-4}$ d'où $a_{\text{eq}} = \frac{\Omega_{r,0}}{\Omega_{m,0}} \sim 2,7 \times 10^{-4}$. On peut en déduire que $\frac{1}{1+z_{\text{eq}}} \sim 2,7 \times 10^{-4}$.

Remarque: De manière générale si on ne précise pas de quelle égalité on parle, c'est l'égalité matière rayonnement.

Égalité matière constante cosmo: Même raisonnement.

On a $\Omega_{m,0} a_{m\Lambda}^{-3} = \Omega_{\Lambda}$. D'où $a_{m(m\Lambda)} = \sqrt[3]{\frac{\Omega_{m0}}{\Omega_{\Lambda}}}$

Après calculs on trouve $a_{m\Lambda} \sim 0,75$ et $z_{m\Lambda} = \frac{1}{a_{m\Lambda}} - 1 = 0,33$.

Succession des ères cosmologiques:

- $a < a_{\text{eq}} \Leftrightarrow$ ère rayonnement, Ω_r domine
- $a_{\text{eq}} < a < a_{\Lambda m} \Leftrightarrow$ ère matière, Ω_m domine
- $a_{\Lambda m} < a \Leftrightarrow$ ère de la constante cosmologique

VI-F Importance des équations d'état

D'après la 2^e équation de Riemann on a $\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \sum_{i \in \{\text{fluides}\}} \Omega_i(t)(1+3w_i)$.

Ainsi tout fluide d'équation d'état $w_i < -\frac{1}{3}$ peut induire une accélération. De tels fluides sont appelés **énergie sombre**.

VII Évolution temporelle du facteur d'échelle

VII-A Pendant l'ère rayonnement

On considère un modèle d'univers ne contenant que du rayonnement et de géométrie euclidienne.

On a ainsi $\forall i \in \{\text{fluides}\} \setminus \text{rayonnement}, \Omega_i = 0$ et $k = 0$.

Ainsi la première équation de Friedmann s'écrit

$$H^2 = H_0^2 \Omega_{r(t)}. \quad (68)$$

Ou encore

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{r0} a^{-4} \quad (69)$$

Par séparation des variables on trouve

$$a(t) \propto \sqrt{t}$$

Et comme il n'y a que du rayonnement on a $\Omega_{r0} = 1$ et on peut écrire

$$a(t) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (70)$$

où $t_0 = \frac{2}{H_0}$.

VII-B Pendant l'ère matière

On considère un modèle d'univers ne contenant que de la matière seule et de géométrie euclidienne.

Ainsi la première équation de Friedmann s'écrit

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = H_0^2 \Omega_{m,0} a^{-3} \quad (71)$$

On trouve cette fois

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3}}.$$

VII-C Pendant l'ère de la constante cosmologique

On considère toujours un univers de géométrie euclidienne et on trouve

$$a(t) \propto \exp(\sqrt{\Omega_\Lambda} H_0 t)$$

VII-D Calcul de l'âge de l'univers

Dans un premier temps, déterminons la durée écoulée depuis le Big Bang jusqu'à aujourd'hui.

Notons le t_0 .

On a

$$t_0 = \int_0^{t_0} dt = \int_0^1 \frac{dt}{da} da = \int_0^1 \frac{da}{a H_0 E(a)} \quad (72)$$

où l'on a posé $E^2(a) = \sum_{i \in \{\text{fluides}\}} \Omega_{i,0} a^{-3(1+w_i)} + \Omega_{k,0} a^{-2}$.

D'où

$$t_0 = t_{H_0} \int_0^1 \frac{da}{a E(a)} \quad (73)$$

où l'on a posé $t_{H_0} = \frac{1}{H_0}$ (car on a $[H_0] = T^{-1}$).

Et on déduit de ce raisonnement l'âge de l'univers à chaque instant:

$$t_{\text{âge}} = t_{H_0} \int_0^{a(t)} \frac{da}{a E(a)} \quad (74)$$

Exercice Calculer l'âge de l'univers aujourd'hui dans un univers euclidien dans les cas suivants:

1. univers matière seule
2. univers rayonnement seul
3. constante cosmologique seule

Dans quel cas l'âge de l'univers peut-il être fini ?

VII-E Mais quel modèle considérer pour notre univers ?

Définition 7.5.1 (Λ CDM): Le modèle Λ CDM est le modèle permettant de décrire notre univers. Il s'agit de la constante cosmologique et de *Cold Dark Matter*.

Dans ce cas on a $E^2(a) = \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k0}a^{-2}$.

Avec les valeurs $\Omega_{m0} = 0,3089$, $\Omega_{\Lambda} = 0,6911$, $H_0 = 67,74 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$, $\Omega_{k,0} = 0$ (géométrie euclidienne), on obtient: $t_0 = 13,799 \times 10^9$ ans.

Exercice Calculer l'âge de l'univers à l'égalité.

On donne $\Omega_{m0} = 0,3$, $\Omega_{\Lambda} = 0,7$, $\Omega_{r0} = 8 \times 10^{-5}$, $H_0 = 70 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$.

VIII Distances en cosmologie

VIII-A Distance radiale

VIII-A-1 Distance radiale comobile

On la note D_C . Déterminons son expression. Comme on considère la distance radiale, dans (28) on n'a plus que $ds^2 = -c^2 dt^2 + a^2(t) dX^2$. (?)

Or on considère un photon (c'est) dire $ds^2 = 0$. D'où $dX = c \frac{dt}{a(t)}$.

Ce qui nous permet d'écrire finalement $D_C = \int_{t_{\text{ém}}}^{t_0} c \frac{dt}{a(t)} = c \int_{a(t_{\text{ém}})}^1 \frac{da}{\dot{a}a}$.

D'après la deuxième équation de Friedmann on peut réécrire ceci comme:

$$D_C = R_{H_0} \int_{a_{\text{ém}}}^1 \frac{da}{a^2 E(a)} \quad (75)$$

où l'on a noté $a_{\text{ém}} = a(t_{\text{ém}})$.

Or, comme $a = \frac{1}{1+z}$, on a $\frac{da}{a} = \frac{-dz}{1+z}$. De même, on a:

$$\begin{aligned} E^2(a) &= \Omega_{m0}a^{-3} + \Omega_{r0}a^{-4} + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k0}a^{-2} \\ &= \Omega_{m0}(1+z)^3 + \Omega_{r0}(1+z)^4 + \Omega_{\Lambda} + \Omega_{k0}(1+z)^2 \\ &= E^2(z) \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } D_C(z_{\text{ém}}) = -R_{H_0} \int_{z_{\text{ém}}}^0 \frac{dz}{1+z} \frac{1+z}{E(z)}.$$

D'où finalement

$$D_C(z_{\text{ém}}) = R_{H_0} \int_0^{z_{\text{ém}}} \frac{dz}{E(z)}. \quad (76)$$

VIII-A-2 Distance radiale physique

Définition 8.1.2.1 (Distance physique): C'est la distance entre nous et la source à l'instant t .
On a

$$D_{\text{phys}}(t) = a(t)D_C(z). \quad (77)$$

Et en particulier $D_{\text{phys}}(t = t_0) = D_C(z)$. Cette distance ne se mesure pas.

VIII-B Horizons cosmologiques

VIII-B-1 Horizon des particules et distance de causalité

Définition 8.2.1.1 (Horizon (des particules)): Distance maximale qu'une particule libre a pu parcourir depuis le Big Bang, à l'instant t .

Comme rien ne va plus vite que la lumière, on va considérer des photons (*ie* $ds^2 = 0$).

On définit l'**horizon comobile** comme:

$$d_{\text{Hor},c}(t) = R_{H_0} \int_0^{a(t)} \frac{da}{a^2 E(a)}. \quad (78)$$

qui peut se simplifier comme au paragraphe précédent.

On définit également l'**horizon physique à l'instant t**:

$$d_{\text{Hor}}(t) = a(t)d_{\text{Hor},c}(t) \quad (79)$$

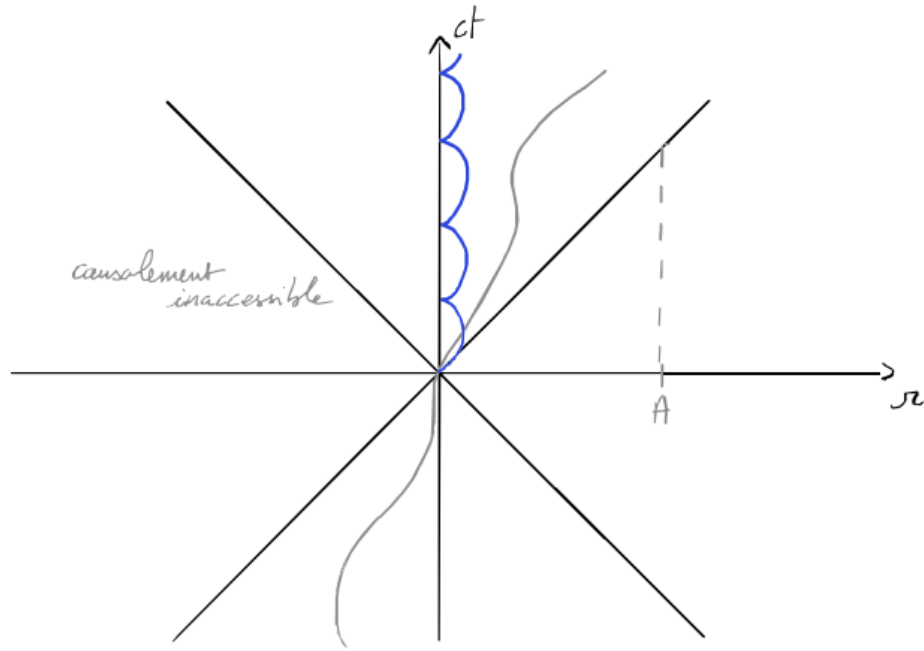
Exercice Exprimer d_{Hor} en terme de redshift.

Définition 8.2.1.2 (Distance de causalité): L'**horizon** est la **distance de causalité**. Deux points ou objets séparés par une distance physique supérieure à $d_{\text{Hor}}(t)$ n'ont, a priori, jamais été en contact causal.

Plus généralement, on peut parler de *passé causal*.

En noir, on a tracé le **cône de lumière**, c'est la ligne d'univers des objets qui n'ont pas de masse. En gris, c'est un exemple de ligne d'univers d'objet massif. En bleu, la ligne d'univers d'une balle qui rebondit sans dissipation.

On appelle *ici et maintenant* l'origine du repère. Le point A représente un *ailleurs* et la distance en pointillés est la durée à attendre pour que *ici et maintenant* puisse interagir avec *ailleurs*. On appelle **passé causal** les événements qui ont pu avoir une influence sur *ici et maintenant*.



VIII-B-2 Horizon pour un univers $E(a) \propto a^{-n}$

Déterminons l'horizon pour un tel univers. On a

$$d_{\text{Hor}}(t) = a(t) R_{H_0} \int_0^{a(t)} \frac{db}{b^2 E(b)} \quad (80)$$

$$\propto a(t) R_{H_0} \int_0^{a(t)} \frac{db}{b^{2-n}}$$

Ainsi, l'horizon est **infini** (l'intégrale diverge en 0) si $2 - n \Rightarrow 1$! Dans ce cas, tout aurait été en contact causal.

Si on suppose cette fois un **univers dominé par (voire ne contenant que) un fluide** d'équation $w = cte$. On aurait ainsi $E^2(a) = a^{-3(1+w)}$.

On tombe sur le cas précédent avec $n = \frac{3}{2}(1+w)$; l'horizon serait infini si $w \leq \frac{1}{3}$! De plus, pour un univers ne contenant qu'un fluide d'équation d'état $w \leq -1$, le Big Bang est repoussé à $t = -\infty$ ⁶.

Ainsi pour $w \in]-1; -\frac{1}{3}]$ on a un Big Bang à $t = 0$ et une distance de causalité infinie.

VIII-B-3 Horizon des événements cosmologiques

Définition 8.2.3.1 (Horizon des événements cosmologiques): Distance maximale d'où la lumière émise maintenant (ie à $t = t_0$) pourra nous parvenir dans le futur ($t > t_0$).

$$d_{ev,c}(t_0) = \int_0^{d_{ev,c}}(t_0) d\chi = c \int_{t_0}^{t_{\max}} \frac{dt}{a(t)}. \quad (81)$$

⁶Why ? Ask

Exemple: modèle d'un univers surdense.

Sur l'univers est surdense, alors il y a ralentissement de l'expansion de l'univers⁷

Dans ce cas, $\dot{a}$ décroît et peut finir par devenir négatif, et mener à un **grand effondrement** (Big Crunch).

La seule chose qui pourrait nous sauver la mise est la constante cosmologique: elle deviendra dominante et accélérera l'expansion à ce moment là.

Néanmoins, tant qu'elle est nulle, on a $t_{\max} = t_{\text{Big Crunch}}$ dans (81).

Autre possibilité: a croît toujours.

Dans le cas de notre univers (modèle Λ CDM), on n'observe aucun effondrement. a croît toujours. On peut calculer $d_{\text{ev},c}$ dans ce cas:

$$d_{\text{ev},c} = R_{H_0} \int_{a_0}^{a_{\max}} \frac{db}{b^2 \sqrt{\Omega_{\Lambda} + \Omega_{m,0} b^{-3}}} \quad (82)$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{b}$, le calcul de l'intégrale est plus aisé. On fait tendre $a_{\max}$ vers $+\infty$ et on trouve $d_{\text{ev},c}(t) = 5045,7 \text{ Gpc}$.

Exercice

À partir de quel redshift z_C les galaxies lointaines ont-elles une **vitesse de récession supérieure à c (!)** ? On cherche la formule analytique complète et une application au modèle d'univers *Einstein - de Sitter* ($k = 0$ et $\Omega_{m,0} = 1$).

Dans le modèle Λ CDM, z_C est-il plus grand ou plus petit ?

⁷Ébauche de réflexion: D'après la 2^e équation de Friedmann, $\ddot{a} = -\frac{1}{2}H_0^2 \sum_i \Omega_i(1 + 3w_i)$. Si la surdensité assure la positivité de la somme, alors on a gagné.

VIII-C Distances mesurables en cosmologie

VIII-C-1 Distance angulaire

Définition 8.3.1.1 (Distance angulaire): Distance définie par la taille ℓ projetée sur le ciel d'un objet, et l'angle θ que cet objet sous-tend sur le ciel par rapport à l'observateur.

Classiquement on a: $\theta = \frac{\ell}{D}$ (avec $\theta \ll 1$), où l'on cherche D .

En cosmologie on définit, pour un objet de redshift z , $D_A(z)$ comme suit:

D'après FLRW, en se plaçant à φ et θ choisis, $D_A(z) = a f_k(\chi_S) = \frac{1}{1+z} f_k(D_C(z))^8$

D'où finalement,

$$D_A(z) = \frac{R_0}{1+z} \begin{cases} \sin\left(\frac{D_C(z)}{R_0}\right) \\ \frac{D_C(z)}{R_0} \\ \sinh\left(\frac{D_C(z)}{R_0}\right) \end{cases} \quad (83)$$

selon la valeur de k (1, 0, -1).

VIII-C-2 Distance de luminosité

On rappelle que l'on définit la **luminosité intrinsèque** d'une source comme l'énergie libérée par unité de temps. Ainsi on a $[L] = [E]T^{-1} = M \cdot L^2 \cdot T^{-3}$ et $L = \frac{\Delta E}{\Delta t}$.

On définit également le **flux d'énergie** à une distance d d'une source:

$$F = \frac{L}{4\pi d^2} \quad (84)$$

Définition 8.3.2.1 (Distance de luminosité):

$$D_L = \sqrt{\frac{L_S}{4\pi F}} \quad (85)$$

Explication intuitive: on considère un objet de luminosité L et un observateur ponctuel à une distance D de cet objet. L'ensemble de l'énergie lumineuse émise est répartie sur la surface de la sphère de rayon D . L'énergie reçue est alors d'autant plus faible que l'observateur est loin de la source. On peut déterminer D à partir de cette atténuation.

Néanmoins dans le cadre de la cosmologie, l'observateur n'a pas la même horloge et l'énergie est déplacée par l'expansion de l'univers.

On ne mesure donc **pas** $L_S = \frac{\Delta E_e}{\Delta t_e}$ **mais** $L_0 = \frac{\Delta E_0}{\Delta t_0}$.

On a donc besoin de relier ces deux grandeurs. Pour ce faire, on se place dans le cadre monochromatique (plus simple, sinon il faut considérer tout le spectre) et on peut écrire:

⁸Les f_k définis comme suit dans la définition sont trouvés dans l'exercice des métriques.

$$\frac{\Delta E_e}{\Delta E_0} = \frac{h\nu_e}{h\nu_0} = \frac{\lambda_0}{\lambda_e} = 1 + z \quad (86)$$

Donc,

$$\frac{L_S}{L_0} = \frac{\Delta E_e}{\Delta E_0} \times \frac{\Delta t_0}{\Delta t_e} = (1 + z) \frac{\nu_e}{\nu_0} = (1 + z)^2. \quad (87)$$

Et finalement

$$L_0 = \frac{L_S}{(1 + z)^2} \quad (88)$$

Quid du flux F ?

Le flux est la luminosité distribuée de manière isotrope sur la surface Σ de la sphère centrée autour de la source et qui intercepte l'observateur. Le centre de cette sphère se trouve donc à la coordonnées χ_S (comobile).

Ainsi (FLRW à φ et θ fixés), $\Sigma(t) = 4\pi [a(t)f_{k(\chi_S)}]^2 \Rightarrow \Sigma(t_0) = 4\pi f_{k(D_c(z))}^2$.

D'où

$$F = \frac{L_0}{\Sigma(t_0)} = \frac{L_S}{(1 + z)^2} \frac{1}{4\pi f_{k(D_c(z))}^2}. \quad (89)$$

On peut ainsi donner une nouvelle expression, plus explicite à la distance de luminosité D_L , puisqu'on a $D_L(z) = \sqrt{\frac{L_S}{4\pi \frac{L_0}{\Sigma(t_0)}}}$.

Définition 8.3.2.2 (Distance de luminosité (v2)):

$$D_{L(z)} = f_{k(D_c(z))} = R_0 \begin{cases} \sin\left(\frac{D_C(z)}{R_0}\right) \\ \frac{D_C(z)}{R_0} \\ \sinh\left(\frac{D_C(z)}{R_0}\right) \end{cases} \quad (90)$$

Cette définition montre que l'on peut passer facilement de la distance angulaire à la distance de luminosité par la relation suivante:

$$D_L(z) = (1 + z)^2 D_A(z) \quad (91)$$

VIII-C-3 Magnitude

En pratique $D_L(z)$ n'est jamais mesurée directement, elle est mesurée statistiquement (grand nombre de mesures du flux). Mais on fait face à quelques difficultés:

- Il faut connaître la source pour avoir L_S
- Les sources ne sont presque jamais monochromatiques
- On n'observe jamais l'entièreté du spectre électromagnétique

On a introduit une nouvelle grandeur, afin de fonctionner par comparaison.

Définition 8.3.3.1 (Magnitude apparente): Mesure de la brillance d'une source par rapport à un objet de référence.

$$m = -2,5 \log_{10} \left(\frac{\text{Flux}}{\text{Flux de référence}} \right) \quad (92)$$

Durant la Grèce antique, les étoiles visibles à l'oeil nu ont été classées des plus brillantes ($m = 1$) aux moins brillantes ($m = 5$). Pour se rendre compte, $m = 1 \Leftrightarrow F \sim 40\%$ du flux de référence, et dans un autre cas, $m = 5 \Leftrightarrow F \sim 1\%$ du flux de référence.

Il existe plusieurs systèmes de magnitude, en fonction du flux de référence choisi. Si on ne précise pas, le flux de référence est celui de l'étoile Vega (magnitude apparente nulle).

Définition 8.3.3.2 (Magnitude absolue et module de distance): Magnitude qu'aurait la source si elle était à **10 pc** de nous (la maison d'à côté finalement). On la note M et elle permet de définir le **module de distance** μ :

$$\mu = m - M \quad (93)$$

VIII-C-4 Comparaison des différentes distances

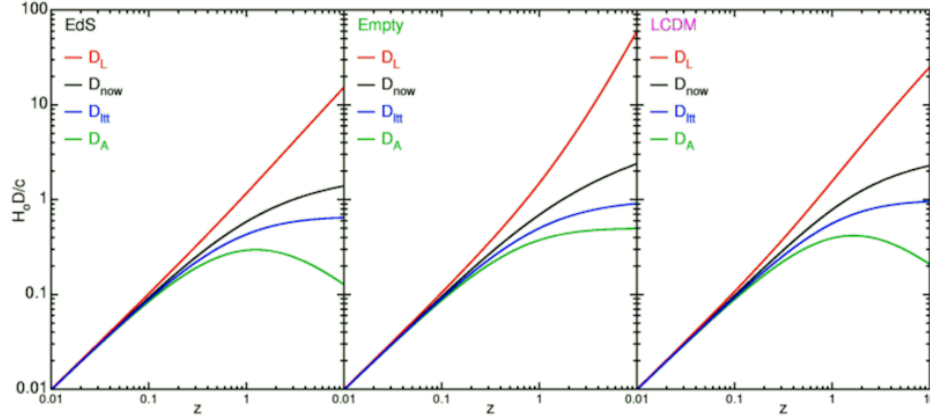


Figure 5: Distances en fonction du redshift, pour trois modèles d'univers différents. De gauche à droite: Einstein-de Sitter, vide, Λ CDM.

Dans la Figure 5 on a noté D_{now} la distance radiale et la distance D_{ltt} obtenue en multipliant le temps de voyage des photons par la vitesse de la lumière ("ltt" = "light travel time").

IX Problèmes du modèle

Petites remarques préliminaires:

- Même quand on modifie le modèle standard, les scientifiques l'appellent toujours modèle standard.
- Le Big Bang n'est pas une théorie, c'est plus quelque chose qu'on ne comprend pas, qui a eu lieu à $t = 0$. La relativité générale dit que à $t = 0$, $a = 0 \Rightarrow$ toutes les distances sont nulles $\Rightarrow$ toutes les énergies sont égales à $+\infty$. Ce qui est absurde. Pour pouvoir parler correctement de l'instant $t = 0$

il faudrait pouvoir marier la physique de l'infiniment grand (RG) et de l'infiniment petit (mécanique quantique).

On se place dans la suite dans le cadre du modèle standard.

IX-A Défauts topologiques

Mais où sont passés les défauts topologiques, comme les monopôles magnétiques, dans notre modèle ?

IX-A-1 Brisures de symétrie

On remarque lors d'expériences de physique des particules que lorsque l'énergie diverge, les constantes de couplage des forces fondamentales changent⁹ et convergent toutes vers une même valeur. À très haute énergie, les forces fondamentales se comportent de façon identique. En particulier, au delà de $\sim 10^{16}$ GeV¹⁰, les forces électromagnétique, faible et forte sont unifiées. Tous les vecteurs de force (photons, bosons, gluons) se comportent comme s'ils étaient la même particule.¹¹ Et ces valeurs d'énergie sont aisément atteintes lors du Big Bang.

Lorsque la température d'un milieu diminue, il peut y avoir des **brisures de symétries** qui mènent à la création de **défauts topologiques**.

Cela s'observe par exemple avec les transitions de phase. Prenons de l'eau liquide qui se transforme en glace. Un glaçon est composé de cristaux, il n'y a plus d'invariance par rotation ou de symétrie quelconque. Il y a apparition de défauts topologiques: le cube de glace n'est pas totalement transparent, on observe des *moirées*.¹²

Dans le cas de l'univers, on a $a \propto T^{-1}$. Ainsi lorsque l'univers se dilate (a croît), la température diminue. Les transitions de phase ont mené à la séparation des forces.

$$Rq: \varepsilon_r = \sigma T^4 \text{ et } \varepsilon_r \propto a^{-4}.$$

IX-A-2 Transitions de phase

Tout d'abord, les transitions de phase arrivent bien avant 3 minutes, c'est à dire bien à avant la nucléosynthèse.

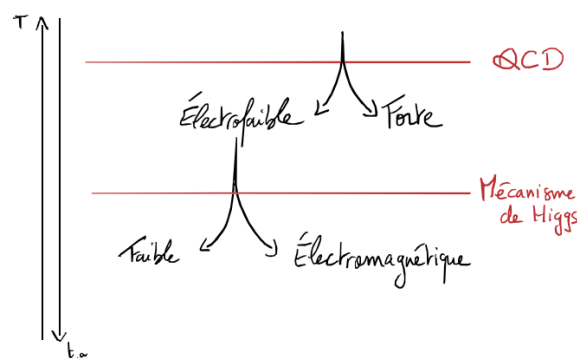


Figure 6: Évolution des forces durant les transitions de phase

⁹Une constante de couplage est nombre caractéristique de l'intensité d'une interaction. On a notamment observé ce changement pour la *constante de structure fine*, constante associée à l'interaction électromagnétique et définie par $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ (1916, Arnold Sommerfeld), dont l'interprétation reste encore floue.

¹⁰Appelé *seuil de GUT*

¹¹Quid de la masse ?

¹²On parle de sites de nucléation.

La première brisure est liée au **QCD**. Ce dernier est responsable du confinement des quarks dans les baryons. Si on essaie d'éloigner les quarks, ils s'attirent encore plus ! Néanmoins, il n'y a pas encore de modèle très clair à ce sujet.

La seconde brisure est liée au **mécanisme de Higgs** (ou plutôt mécanisme de Brout-Englert-Higgs-Hagen-Guralnik-Kibble¹³). *La suite est une compilation de notes de recherches personnelles quant à ce mécanisme.*

Comment cela fonctionne-t-il dans les grandes lignes ?

On introduit Φ un champ scalaire (de potentiel V) qu'on appelle *champ de Higgs électrofaible*.

L'interaction d'une particule avec Φ serait responsable de l'apparition de la masse. D'un côté on a le photon ("porteur" de l'interaction électromagnétique) qui n'est pas influencé par Φ : il peut se mouvoir dans le champ. De l'autre on a les bosons W et Z ("porteurs" de l'interaction faible) pour lesquels il est plus difficile de se déplacer.¹⁴

La brisure de symétrie par le mécanisme de Higgs se manifeste également par la différence de portée entre les deux interactions. Le photon n'interagit pas avec Φ , il n'est pas "ralenti" par ce champ et a une portée infinie. Contrairement aux bosons W et Z .

On peut associer à ce champ Φ un potentiel $V(\Phi^\dagger\Phi) = \mu^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$. *Mais que faire avec ?*

En tout cas, avant et après la brisure, la physique reste la même (et cela est fondamental !).

IX-B Problème de l'horizon cosmologique

On rappelle que l'horizon est équivalent à la *distance de causalité*.

Au moment de la libération du CMB, la distance de causalité est d'environ $5,8 \times 10^{-5} R_{H_0}$ ce qui est environ 256,6 kpc.

Néanmoins si on observe la carte du CMB, il y a la même température partout, entre des zones qui n'ont jamais été en lien de causalité !

IX-C Problème de la platitude

On notera dans la suite par un indice T , le mot "Total"

Un univers plat revient à considérer $k = 0$, c'est à dire $\Omega_{k0} = 0$, il n'y a que peu de chances d'avoir cette valeur exacte. Pour $k = \pm 1$, on a $|\Omega_{k0}| \neq 0$ qui a tout de même plus de possibilités.

Qu'à cela ne tienne ! Autorisons $\Omega_{k0} \neq 0$ mais tout de même $|\Omega_{k0}| \ll 1$.

On a définit à partir de la 1^{ère} équation de Friedmann à

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3c^2} \varepsilon_T(a) - k \frac{c^2}{R^2(t)} \quad (94)$$

à $t = t_0$ une densité d'énergie critique

$$\varepsilon_C = \frac{3c^2 H_0^2}{8\pi G} \quad (95)$$

Nous allons cette fois définir à chaque instant une densité critique qui correspond à $k = 0$. Par le même raisonnement que pour ε_C , on pose

¹³Et ils l'ont chacun introduit indépendamment en 1964 !

¹⁴Une masse inertielle, donc ? Caractérisant la résistance des particules à l'accélération.

$$\varepsilon_C(a) = \frac{3c^2 H^2(a)}{8\pi G} \quad (96)$$

On définit alors

$$\boxed{\tilde{\Omega}_T = \frac{\varepsilon_T(a)}{\varepsilon_C(a)}} \quad (97)$$

qui permet d'écrire (94) comme

$$\boxed{1 = \tilde{\Omega}_T(a) + \tilde{\Omega}_k(a)} \quad (98)$$

où l'on a posé

$$\tilde{\Omega}_k(a) := -k \frac{c^2}{R^2(t)H^2(t)} \quad (99)$$

Donc $|\tilde{\Omega}_k(a)| \propto a^{-2}H^{-2}$.

Ainsi, pendant l'ère matière, sachant que $a \propto t^{\frac{2}{3}}$ ie $H \propto \frac{1}{t} \propto a^{-\frac{3}{2}}$: $|\tilde{\Omega}_k(a)| \propto a$.

Et pendant l'ère rayonnement, par le même raisonnement on trouve $|\tilde{\Omega}_k(a)| \propto a^2$.

Ainsi, dans l'univers passé bien connu, $\tilde{\Omega}_k(a)$ n'a fait que croître. Or, d'après les mesures on a aujourd'hui (valeur maximale donc) $|\Omega_{k,0}| = |\tilde{\Omega}_k(0)| \simeq 6 \times 10^{-6}$. Ce qui sous-entend que dans le passé, $|\tilde{\Omega}_k(a)|$ était vraiment faible.

Voici quelques exemples de valeurs:

- à l'égalité on a $|\tilde{\Omega}_k(a_{\text{eq}})| \lesssim 1,87 \times 10^{-6}$
- au temps de Planck (temps jusqu'au quel on peut dire que la physique "que l'on connaît" fonctionne), $t_{\text{Planck}} \sim 10^{-44} \text{ s}$ on obtient: $|\tilde{\Omega}_k(a_{\text{eq}})| \lesssim 8 \times 10^{-62}$!!¹⁵

IX-D L'inflation primordiale: une solution aux 3 problèmes ?

IX-D-1 Définition de l'inflation primordiale

Définition 9.4.1.1 (Inflation primordiale): On appelle ainsi la phase d'expansion primordiale entre le Big Bang et le début de l'ère rayonnement qui dilate tout rayon de courbure initial par le facteur dont on a besoin. On peut voir ça comme "on a assez gonflé le ballon de baudruche".

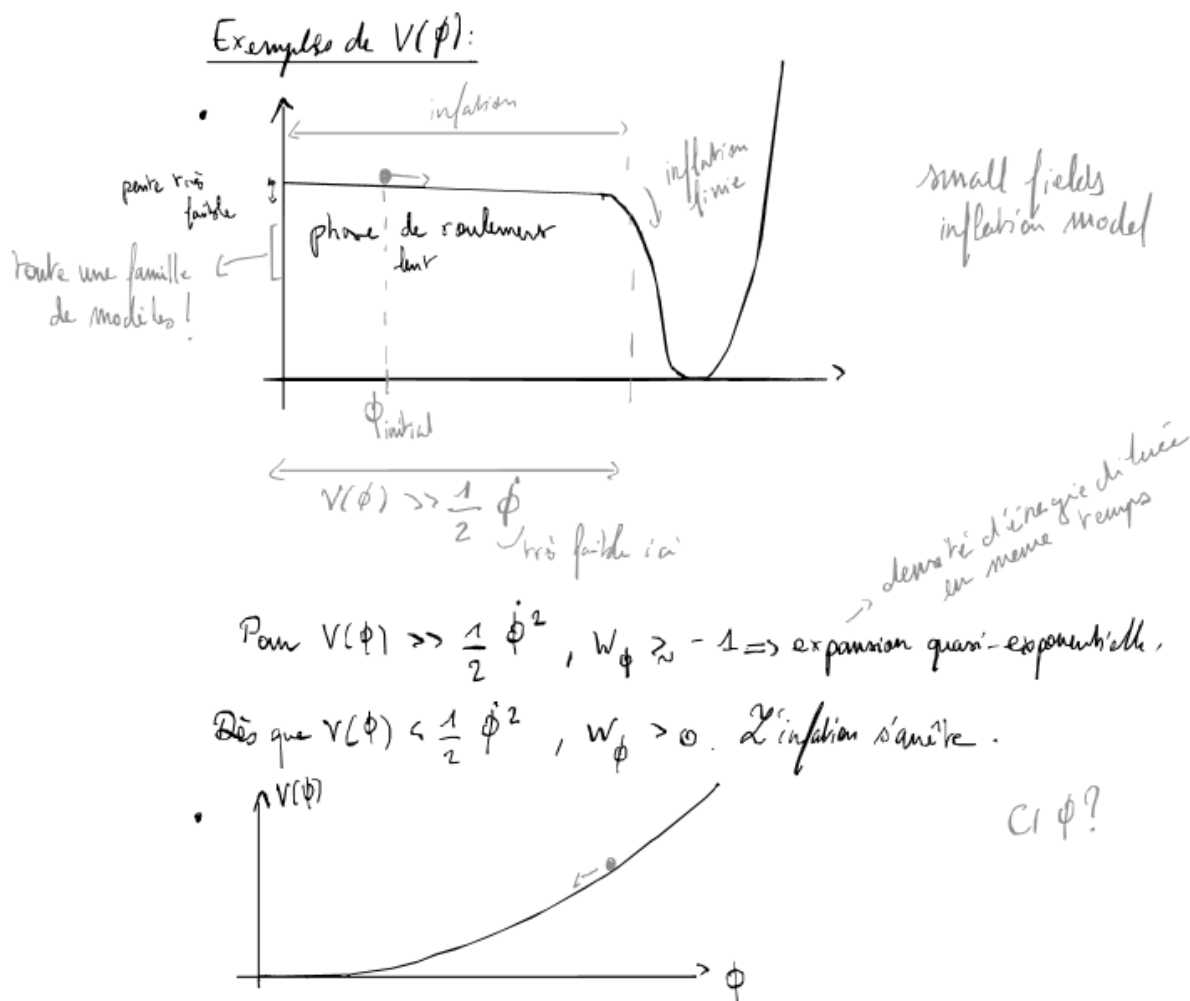
Le moyen le plus simple d'obtenir une telle configuration est de considérer un **champ scalaire homogène et isotrope** Φ que l'on va appeler l'**inflaton**.

On a dans ce cas $T_{\mu\nu}^{\Phi} = \text{diag}(\varepsilon_{\Phi}, P_{\Phi}, P_{\Phi}, P_{\Phi})$ avec $\begin{cases} \varepsilon_{\Phi} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \\ P_{\Phi} = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi) \end{cases}$.

Le terme en $\dot{\Phi}$ est un terme cinétique. Plus précisément il s'agit d'une densité d'énergie cinétique définie par $\frac{1}{2}\partial_{\mu}\partial^{\mu}\Phi$. Étant donné le caractère homogène et isotrope qu'on a ici, cela revient à $\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2$.

¹⁵ Ajustement fin, ou *fine tuning* en anglais.

IX-D-2 Des exemples de potentiel



X Éléments de formation des structures

Lorsque l'on observe le CMB on voit $\bar{T}(t_0) = 2,725K$ et $\frac{\Delta T}{T_{\text{rms}}} \sim \text{qqs } 10^{-6}$, où l'on a noté *rms* root mean squared (déviatoin standard). Le fond diffus cosmologique n'est donc pas homogène, on observe des **anisotropies** !

On pose $\delta(\vec{r}, t) = \frac{\rho(\vec{r}, t) - \bar{\rho}(t)}{\bar{\rho}(t)}$, le **contraste de densité** et on a:

$$\frac{\Delta T}{T}(\vec{n}) = \frac{1}{3} \delta(\vec{r})|_{r_{\text{CMB}}} - \underbrace{\frac{\vec{v}}{c} \cdot \vec{n}}_{\text{Effet Doppler cinétique}} + \underbrace{\frac{\Phi(\vec{r})}{c^2}}_{\text{Effet Sachs-Wolfe}^{16}}|_{r_{\text{CMB}}} \quad (100)$$

où $\vec{n}$ est la ligne de visée.

Mais comment décrire l'évolution de ces contrastes de densité ? Comment décrire la formation des structures ?

X-A Instabilité gravitationnelle de Jeans (1900 - 1905)

Considérons un fluide de densité ρ , de champ de vitesse $\vec{v}$, de pression P , plongé dans un champ gravitationnel Φ .

¹⁶Influence des puits gravitationnels. J'ai trouvé ce court article intéressant à ce propos.

Nous avons trois outils à notre disposition pour décrire ce fluide:

1. L'équation de continuité de la masse:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0} \quad (101)$$

2. L'équation de Poisson qui fait le lien entre la distribution de matière et le potentiel gravitationnel:

$$\boxed{\Delta \Phi = 4\pi G} \quad (102)$$

1. L'équation de la conservation de la quantité de mouvement, ou équation d'Euler:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\vec{\nabla} P + \rho \vec{g} \quad (103)$$

où $\vec{g} = -\vec{\nabla} \Phi$ et où l'on a noté $\frac{d}{dt}$ la **dérivée advective**.

Définition 10.1.1 (Dérivée advective): Lorsque la fonction que l'on souhaite dériver dépend directement du temps en plus de la position ($f(t, x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$) et pas juste $f(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$ la dérivée totale s'écrit

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} \quad (104)$$

Ou encore

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) f \quad (105)$$

où l'opérateur $\vec{v} \cdot \vec{\nabla}$ est appelé **opérateur d'advection**¹⁷. Ce terme correspond au déplacement du fluide.

Finalement on écrit:

$$\boxed{\partial_t \vec{v} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} = \frac{-\vec{\nabla} P}{\rho} - \vec{\nabla} \Phi} \quad (106)$$

On considère une instabilité linéaire: de faibles perturbations initiales autour d'une solution "à l'équilibre". On va considérer une telle perturbation pour chaque quantité: $\rho(\vec{r}, t) = \bar{\rho} + \delta\rho_1(\vec{r}, t)$

¹⁷On appelle advection le transport d'une quantité par le mouvement du milieu environnant.