

Rapport de stage de L3

Étude des effets de saturation gluonique dans le proton à haute énergie

Rosevita Pourcelot d'Hennezel

sous la direction de Samuel Wallon et Michael Fucilla

IJCLab, Pôle théorique

Bâtiment 210, 210 rue Henri Becquerel, Bures-sur-Yvette

10 juin 2025 - 18 juillet 2025



Table des matières

I	Introduction	4
II	Introduction de systèmes d'unités et de coordonnées	5
II.1	Système d'unités naturelles	5
II.2	Rapacité et coordonnées du cône de lumière	6
III	Diagrammes de Feynman	6
III.1	Principe général	6
III.2	Variables de Mandelstam	7
IV	Contexte théorique	7
IV.1	Groupe $SU(N)$	7
IV.2	Théorie des représentations et conséquences physiques	7
IV.2.1	Représentation fondamentale	7
IV.2.2	Représentation adjointe	8
IV.3	Émission gluonique et démultiplication des dipôles	9
V	Étude expérimentale des particules: collisions	10
V.1	Objectif des collisions	10
V.1.1	Non existence de quarks solitaires	10
V.1.2	Sondage de particules	10
V.2	Collisions profondément inélastiques	11
V.3	Résultats connus	13
V.4	Résultats attendus	13
VI	L'équation de Balitsky-Kovchegov	14
VII	Résolution de l'équation BK	14
VII.1	Définitions	14
VII.2	Conditions choisies	15
VII.3	Méthode naïve	15
VII.3.1	À η fixe	15
VII.3.2	Avec l'évolution de η	16
VII.4	Méthode de différentiation automatique	16
VIII	Conclusion	18
IX	Remerciements	18
	Bibliographie	18
A	Annexe 1: Antiparticules, équation de Klein-Gordon	20
A.1	Opérateurs	20
A.1.1	Opérateurs ∂_μ et ∂^μ	20
A.1.2	Opérateur d'Alembertien $\square$	20
A.2	Équation de Klein-Gordon	20
A.2.1	Énoncé	20
A.2.2	Onde plane	20
B	Annexe 2: Représentations fondamentale et antifondamentale	21
C	Annexe 3: Code de la méthode d'Euler	22

Résumé :

Ce stage s'est déroulé au laboratoire IJCLab (Irène Joliot-Curie) dans le cadre de l'étude des effets de saturation gluonique dans le proton à haute énergie. Les objectifs principaux étaient tout d'abord de comprendre la physique mise en jeu, puis de résoudre numériquement l'équation de Balitsky-Kovchegov (BK) qui décrit l'évolution des amplitudes de diffusion dans le cadre de collisions profondément inélastiques hadron-lepton. Cette évolution permet une mise en évidence de la saturation gluonique. Nous avons comparé deux méthodes de résolution : une approche "naïve" utilisant la méthode d'Euler, et une méthode plus sophistiquée basée sur la différentiation automatique. Les résultats montrent l'émergence du phénomène de saturation gluonique, caractérisé par l'apparition d'un "disque noir" (black disk) où la probabilité d'interaction tend vers 1 pour les dipôles de taille importante. Les résultats révèlent que la saturation se produit pour des dipôles de plus en plus petits lorsque la rapidité η augmente, confirmant les prédictions théoriques sur l'augmentation de la densité gluonique du proton à haute énergie. Ces résultats sont importants pour la compréhension des collisions hadroniques dans les futurs collisionneurs comme l'EIC (Electron-Ion Collider) aux États-Unis.

Abstract :

This internship took place at the IJCLab laboratory (Irène Joliot-Curie) within the framework of studying gluon saturation effects in the proton at high energy. The main objectives were first to understand the physics involved, then to numerically solve the Balitsky-Kovchegov (BK) equation which describes the evolution of scattering amplitudes in the context of deeply inelastic scattering hadron-lepton. This evolution allows for the demonstration of gluon saturation. We compared two solution methods: a "naive" approach using the Euler method, and a more sophisticated method based on automatic differentiation. The results show the emergence of the gluon saturation phenomenon, characterized by the appearance of a "black disk" where the interaction probability tends towards 1 for large-size dipoles. The results reveal that saturation occurs for increasingly smaller dipoles as the rapidity η increases, confirming theoretical predictions about the increase in gluon density of the proton at high energy. These results are important for understanding hadronic collisions in future colliders such as the EIC (Electron-Ion Collider) in the United States.

I Introduction

J'ai effectué ce stage au pôle théorique du laboratoire de physique des deux infinis Irène Joliot-Curie (dit IJCLab). Il a été fondé en 2020 à la suite de la fusion de différents laboratoires, dont notamment le Laboratoire de physique théorique dont est issu l'actuel pôle théorique de l'IJCLab. Mon maître de stage, Samuel Wallon, en est le responsable. Il fait partie de l'équipe de physique hadronique et chromodynamique quantique (dite QCD pour quantum chromodynamics). J'ai également été en lien avec un ancien doctorant en stage puis en post-doctorat avec Samuel Wallon.

Mon stage s'est déroulé dans le cadre de l'étude des effets de saturation gluonique dans le proton à haute énergie. Actuellement, le proton reste une particule assez mystérieuse pour la communauté scientifique même si connue par le grand public. Le proton est composé de trois quarks constitutants, entourés d'une "soupe" élémentaire.

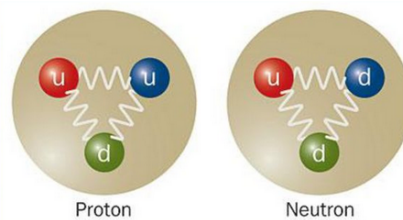


Figure 1: Quarks dans un proton, un neutron

Il existe six quarks différents: up (u), down (d), strange (s), charm (c), bottom (b) et top (t).¹ Les trois quarks principaux du proton sont deux quarks ups et un quark down maintenus entre eux par l'interaction forte.

D'un autre côté, les constituants de la "soupe" sont les gluons, particules médiatrices de l'interaction forte, des quarks et des antiquarks. On regroupe ces particules sous le terme de *parton*.

L'interaction forte présente un comportement contre-intuitif qui la distingue des autres interactions. En effet, plus on essaie de séparer deux quarks plus l'interaction est importante: l'interaction forte devient plus faible à courte distance et plus forte à longue distance, impliquant un "confinement" des quarks dans le proton. On la nomme parfois l'interaction de la QCD. [1]

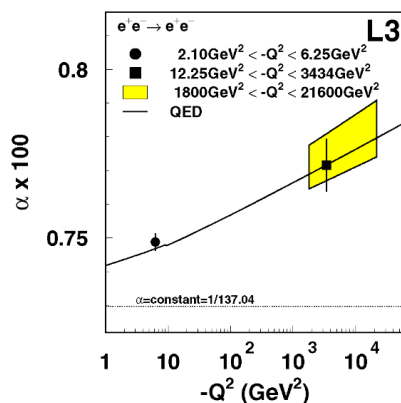


Figure 2: Evolution de α_{EM} en fonction de l'énergie apportée par la collision. [2]

Comme les autres interactions, elle est liée à une constante de couplage notée α_s (pour α strong). Cette constante caractérise l'intensité de l'interaction entre deux particules. Son équivalent en électromagnétisme est la constante de structure fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = 1/137$. Néanmoins ces deux constantes dépendent en réalité des énergies mises en jeu. En effet, α augmente avec l'énergie.

Pour l'interaction forte, on observe un comportement contraire. À haute énergie, α_s diminue, ainsi le couplage diminue: c'est ce qu'on appelle la **liberté asymptotique**. [1]

À faible énergie, α_s est encore assez important, ce qui est problématique pour les études de QCD. En effet, ces dernières se basent sur la théorie des perturbations en α .

¹On trouve parfois dans la littérature beauty et truth à la place de bottom et top.

Il existe une énergie seuil notée Λ ou Λ_{QCD} au delà de laquelle il est possible d'appliquer la théorie des perturbations. En deçà de cette valeur, on est en régime dit non perturbatif: α_s diverge !²

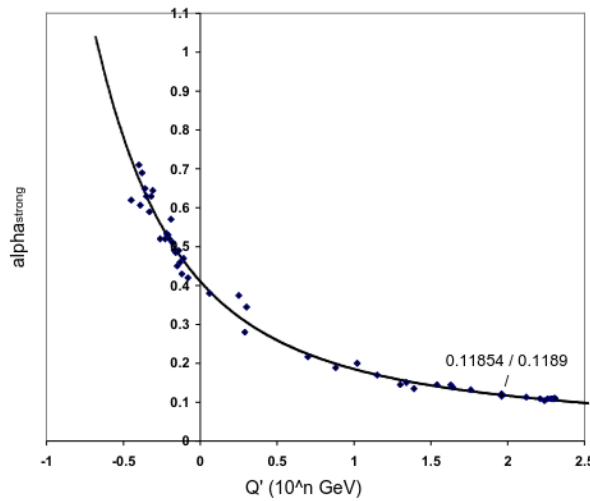


Figure 3: Évolution de α_s dérivée par R. Wayte, points expérimentaux issus de Bethke

Les objectifs principaux du stage étaient tout d'abord de comprendre la physique mise en jeu, puis de résoudre numériquement l'équation dite de Balitsky-Kovchegov (appelée équation BK dans la suite). Cette dernière est établie en régime perturbatif et décrit l'évolution des amplitudes de diffusion dans le cadre de collisions profondément inélastiques que l'on décrira. Cette évolution permet une mise en évidence de la saturation gluonique.

En effet, la dynamique interne du proton reste un mystère pour la recherche aujourd'hui. Par exemple, lorsque l'on étudie la cinématique d'un proton, on s'attendrait à ce que les trois quarks principaux du proton apportent une contribution égale. Néanmoins cela n'est pas ce que l'on observe: il semblerait que la soupe élémentaire ait un rôle plus important à jouer que ce que l'on croyait. [3]

Les simulations numériques des collisions sont un outil très puissant dans le contexte de préparation des expériences au futur Electron-Ion Collider dont la construction a débuté aux États-Unis en 2020. Cet accélérateur permettra de sonder la matière nucléaire dans de nouveaux régimes, l'étude de noyaux lourds où les effets de saturation sont amplifiés, ainsi que la cartographie 3D du proton et des noyaux. Les données de l'EIC nécessiteront des modèles théoriques robustes pour leur interprétation, d'où l'importance cruciale de la résolution précise de l'équation de Balitsky-Kovchegov.

II Introduction de systèmes d'unités et de coordonnées

II.1 Système d'unités naturelles

On note L la dimension de longueur, T de temps. P représente une impulsion, E une énergie et K un vecteur d'onde.

On se place pour la suite dans le système d'unités naturelles. On choisit d'y poser $c = \hbar = 1$. Cette convention mène à avoir $L = T$.

Or,

²Le domaine d'étude du régime non perturbatif est appelé "Chromodynamique quantique sur réseau". Néanmoins ce sont des calculs encore très lourds, avec des calculs pouvant prendre des mois, même sur supercalculateur. [1]

$$P^\mu = (E, \vec{p}) = K^\mu = (\omega, \vec{k}).$$

Cela implique donc que $[P] = [K] = 1/T = 1/L$.

Et finalement on a l'égalité suivante:

$$[P] = [E] = M = 1/L.$$

II.2 Rapidité et coordonnées du cône de lumière

On se place dans l'espace de Minkowski et on y définit d'après [4] :

$$n_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 0, \pm 1)$$

avec $n_i^2 = 0$ et $n_1 \cdot n_2 = 1$.

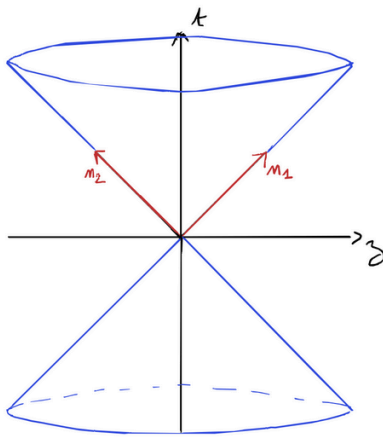


Figure 4: Cône de lumière

Soit v^μ un quadrivecteur (v^0, v^1, v^2, v^3) de l'espace de Minkowski. On définit les coordonnées du cône de lumière:

$$v^\pm := \frac{1}{\sqrt{2}}(v^0 \pm v^3), v_\perp := (v^1, v^2).$$

On définit le quadrivecteur k tel que $k^\mu k_\mu = m^2$ que l'on peut écrire:

$$k = k^+ n_1 + k^- n_2 + k_\perp \quad \text{où} \quad \begin{cases} k^+ = k \cdot n_1 \\ k^- = k \cdot n_2 \\ k_\perp^2 < 0 \end{cases}$$

On sait que $k^2 = m^2$. Or on néglige les masses ici, donc $k^2 \sim 0$. Or, on a

$$k^2 = 2k^+ k^- + k_\perp^2 \sim 0.$$

D'où

$$k^- = \frac{m^2 + k^2}{2k^+} \sim \frac{k^2}{2k^+}.$$

On définit la **rapidité**

$$\eta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{k^+}{k^-} \right) \sim \ln \left(\frac{k^+}{k} \right) + \frac{\ln 2}{2}.$$

Instinctivement, cette grandeur décrit l' "intensité" du mouvement. En effet lorsque la rapidité est importante ($k^+ \gg k^-$), la particule est projetée en avant à une vitesse plus importante, plus proche de la vitesse de la lumière. L'énergie cinétique mise en jeu est plus importante.

III Diagrammes de Feynman

III.1 Principe général

Dans les années 1940, Richard Feynman introduit un langage graphique pour décrire les interactions entre particules. On représente ces dernières par différents tracés: traits pleins pour les quarks et les électrons, lignes ondulées pour les photons et lignes en spirale pour les gluons. On représente une

interaction entre deux particules par un point de jonction entre deux tracés de particules. Le temps s'écoule de gauche à droite dans un diagramme de Feynman.³

On trace dans un diagramme de Feynman les antiparticules comme les particules correspondantes remontant le temps. On peut montrer cette correspondance avec l'équation de Klein-Gordon, présentée en annexe A.

III.2 Variables de Mandelstam

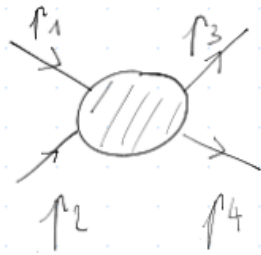


Figure 5: Définitions des moments

D'où $p_i^2 = m_i U^\mu m_i U_\mu = m_i^2 c^2 = m_i^2$. Et finalement après calcul on trouve bien la relation attendue.

On définit $s = (p_1 + p_2)^2$, $t = (p_1 - p_3)^2$ et $u = (p_1 - p_4)^2$. Ce sont les variables de Mandelstam. On a d'ailleurs la propriété suivante:

$$s + t + u = \sum_i m_i^2$$

En effet, par conservation de l'impulsion on a $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$. Or, $p_i^2 = P_i^\mu P_{i\mu}$.

IV Contexte théorique

IV.1 Groupe SU(N)

Définition: Un groupe de Lie est un groupe G muni d'une structure de variété différentielle tel que la multiplication et l'inversion soient de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Il s'agit donc d'un groupe sur lequel on peut faire du calcul différentiel. Le groupe $SU(N)$ ($N \in \mathbb{N}$) en est un exemple, c'est le groupe des matrices unitaires de déterminant 1, de dimension $N^2 - 1$.

Dans le cadre de la chromodynamique quantique, on a choisi de s'appuyer sur le groupe $SU(3)$. Le choix s'est porté sur $SU(3)$ car la modélisation permettait de résoudre un problème issu de la physique expérimentale.

En effet, dans les années 60 la communauté scientifique s'est interrogée au sujet du baryon Δ^{++} constitué de trois quarks *ups*, semblant violer le principe d'exclusion de Pauli. En 1964, l'existence d'un autre degré de liberté au sein des quarks, pour résoudre cette violation, est proposée. Quelques mois plus tard la modélisation avec le groupe $SU(3)$ est proposée, construisant ainsi les fondations d'une théorie qui sera formulée dans les années 70 comme une théorie de jauge (étude des symétries).

On étudie en particulier les *représentations* du groupe $SU(3)$. D'une façon plus générale lorsqu'une théorie physique est modélisée par un groupe de Lie G - c'est-à-dire une construction de Yang-Mills où G joue le rôle de groupe de jauge de l'interaction -, les particules médiatrices des interactions (dits bosons de jauge) appartiennent aux représentations dites adjointes de ce groupe.

IV.2 Théorie des représentations et conséquences physiques

IV.2.1 Représentation fondamentale

Définition: Soit $(G, *_1)$ et $(G', *_2)$ deux groupes finis et V un $\mathbb{K}$ -ev de dimension d .

³Les diagrammes de Feynman sont un formalisme bien plus approfondi. Néanmoins les outils mathématiques et physiques permettant leur compréhension rigoureuse ne peuvent être présentés ici.

On parle de **représentation** de G par G' s'il existe un morphisme de groupe $\varphi : G \rightarrow G'$. C'est-à-dire tel que

$$\forall g_1, g_2 \in G, \varphi(g_1) *_2 \varphi(g_2) = \varphi(g_1 *_1 g_2).$$

On appelle **représentation linéaire** de G sur le corps $\mathbb{K}$ tout couple (V, φ) avec V un $\mathbb{K}$ -ev et φ un morphisme de G dans $GL(V)$. [5]

Définition: On appelle **représentation fondamentale** d'un groupe $G \subset GL(\mathbb{C})$ la représentation linéaire $D : g \mapsto g$. On peut également définir la représentation **antifondamentale**, complexe conjuguée de la représentation fondamentale.

On s'intéresse ici au groupe $SU(N) \subset GL(\mathbb{C})$ et à ses représentations fondamentale et antifondamentale.

Définition : Deux représentations φ et φ' d'un groupe G sont dites **équivalentes** si et seulement si il existe S un opérateur inversible tel que

$$\forall g \in G, D'(g) = S^{-1}D(g)S.$$

Propriété : Soit $N \in \mathbb{N}, N \geq 2$. Les représentations fondamentale et antifondamentale de $SU(N)$ sont équivalentes uniquement pour $N \leq 2$.

On peut trouver une preuve de cette propriété dans l'annexe B. La représentation **fondamentale** que nous venons de définir encode la façon dont les quarks q se transforment sous le groupe de jauge $SU(3)$ de couleur. La non-équivalence entre la représentation fondamentale et antifondamentale laisse entendre l'existence des antiquarks $\bar{q}$. De plus, la représentation fondamentale de $SU(3)$ a pour dimension 3, ce qui correspond au nombre de couleurs des quarks. Une paire quark antiquark $q\bar{q}$ forme un **dipôle de couleur**: dipôle bleu/antibleu, rouge/antirouge ou vert/antiverd, qui peut émettre des gluons.

IV.2.2 Représentation adjointe

Définition: Soit G un groupe de Lie. On construit l'algèbre de Lie associée notée $\mathfrak{g}$ en différentiant autour de l'identité I . Cela nous est permis car G est une variété différentielle. Soit $g \in G$. On a:

$$g(\theta_1, \theta_2, \dots) \simeq I - it^a \theta^a$$

où les t^i sont les générateurs de $\mathfrak{g}$. L'algèbre de Lie est $Vect(t^i)$ muni d'un crochet de Lie vérifiant l'identité de Jacobi:

$$[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0.$$

La représentation adjointe est de dimension égale à celle du groupe. Ainsi celle de $SU(3)$ est de dimension 8. On associe à chacun de ces générateurs un gluon. Il y a donc 8 gluons différents.

De plus ces générateurs sont tels que:

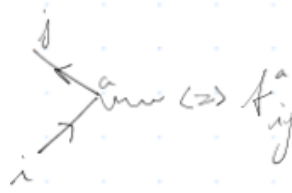
$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c.$$

Ainsi $SU(3)$ n'est pas abélien, ce qui traduit des interactions intergluoniques.⁴

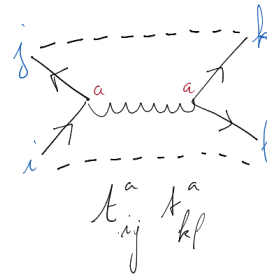
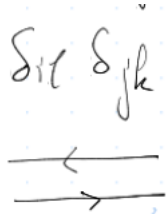
⁴Dans un autre cadre, la théorie de jauge électromagnétique est basée sur le groupe abélien $U(1)$. Il n'y a donc pas d'interactions interphotoniques contrairement aux théories de jauge non-abéliennes comme celle de la chromodynamique quantique que l'on étudie ici.

IV.3 Émission gluonique et démultiplication des dipôles

Dans cette partie, on discute uniquement de la couleur et non de la partie “espace-temps” des diagrammes de Feynman. On représente le générateur $t_{i,j}^a$ par:



De plus on peut représenter une paire quark antiquark comme le produit tensoriel entre l'espace associé à la couleur (représentation fondamentale) et celui associé à l'anticouleur (représentation antifondamentale) noté avec des symboles de Kronecker. On représente la contraction de deux générateurs t_{ij}, t_{kl} donnée par $t_{ij}^a t_{kl}^a$ (somme sur les couleurs) par un diagramme de Feynman également, comme suit.



On peut représenter le mécanisme d'émission gluonique comme suit:⁵

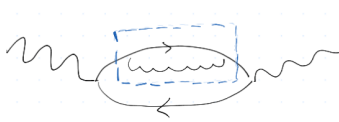


Figure 7: Mécanisme d'émission gluonique



Figure 8: Zoom sur la partie encadrée

On admet l'identité de Fierz donnée par:

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right).$$

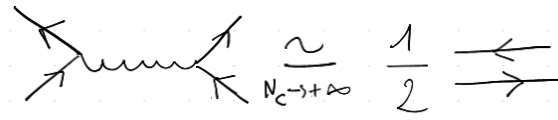
Elle peut se traduire graphiquement par:

$$\text{Diagramme de Fierz} = \frac{1}{2} \left(\text{Diagramme 1} - \frac{1}{N_c} \text{Diagramme 2} \right)$$

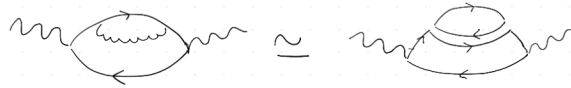
Dans la limite $N \rightarrow +\infty$ appelée limite du modèle dipolaire⁶, on a:

⁵On a ici représenté le carré de l'amplitude ($|\psi\psi^*|^2$).

⁶Se placer dans cette limite mène à des erreurs de l'ordre de 10%. Cela vient du fait que les diagrammes de Feynman proviennent de développements en $A + \frac{1}{N^2}B + \dots$ où la séparation en termes A et B et d'ordres supérieurs à plusieurs origines. Tout d'abord on remplace $SU(N)$ par $U(N)$. Ensuite, pour des raisons topologiques, en utilisant une correspondance entre diagrammes de Feynman et surface à 2 dimensions, il est possible de classer ces contributions en faisant appel au genre de la surface (on peut voir ça comme le nombre de trous qu'elle comporte). Cet appel à la topologie a été théorisé par 't Hooft en 1974.



On peut donc voir ce processus comme la division en deux dipôles:



Le mécanisme d'émission gluonique peut se répéter et on peut obtenir une "cascade" de dipôles. Ces derniers n'influencent pas les autres: dans le calcul de l'amplitude de diffusion (qui revient plus ou moins à un calcul d'amplitude de probabilité) on n'aura pas d'interférences entre les dipôles considérés lorsque l'on passe à la probabilité elle-même.⁷

V Étude expérimentale des particules: collisions

En physique des particules, afin d'étudier ces dernières, on a souvent recours à des collisions. Les collisions courantes sont des leptons sur des hadrons, mais toute collision est étudiable. Ces expériences peuvent être qualifiées d' **élastique** ou d' **inélastique**.

Dans le premier cas, la particule cible reste intacte. Dans le second, elle est altérée par la collision.

V.1 Objectif des collisions

V.1.1 Non existence de quarks solitaires

De telles expériences ont notamment permis de comprendre qu'un quark ne peut pas exister seul. Ceci a été observé lors d'une collision entre un photon et un proton. Si le photon a l'énergie suffisante pour briser une liaison entre deux quarks constituants, on peut espérer isoler un quark. Néanmoins, on observe la formation d'une paire quark/antiquark appelée méson à la suite de cette collision:

$$\gamma + p \rightarrow M + p.$$

Un des antiquarks de la soupe élémentaire s'est lié au quark partant, tandis qu'un quark de cette même soupe est devenu un des trois quarks constituants du proton.

V.1.2 Sondage de particules

On se place dans le cadre d'une collision lepton-hadron. D'après la théorie de DE BROGLIE, on peut associer au lepton incident une longueur d'onde notée λ_{dB} telle que:

$$\lambda_{dB} = \frac{h}{p}.$$

Plus l'énergie du lepton incident est importante, plus sa longueur d'onde associée est petite. Ainsi, avec des énergies importantes, on peut pénétrer plus profondément dans le hadron cible et être sensible à des éléments plus petits. Cela revient en quelques sortes à augmenter la résolution de l'observation.

⁷Si les dipôles parlaient entre eux, on aurait besoin d'un diagramme non planaire pour les représenter, et donc d'aller plus loin dans le développement. Or les diagrammes non plans sont supprimés par au moins une puissance $1/N^2$.

V.2 Collisions profondément inélastiques

Durant ce stage, nous nous intéressons particulièrement à la diffusion d'un électron sur un proton décrite par Figure 10.

Lors de sa propagation, l'électron incident émet un photon virtuel noté γ^* . C'est un *tachyon*, car il est de genre espace. Ce photon fluctue quantiquement en une paire quark/antiquark notée $q\bar{q}$, que l'on appelle dipôle de couleur de taille r . Ce dit dipôle peut interagir avec le proton car le temps de vie de la fluctuation quantique est bien supérieur au temps d'interaction entre celle-ci et le proton.

On pose $k = (k^0, \vec{k})$, l'impulsion de l'électron incident. À haute énergie, la masse de l'électron est négligeable devant les énergies mises en jeu, et on peut considérer que $|\vec{k}| \sim k^0$, on peut écrire

$$k \sim k^0(1, \vec{n})$$

avec $\vec{n} = \vec{k}/k^0$. On définit de la même façon k' , l'impulsion de l'électron après la diffusion.

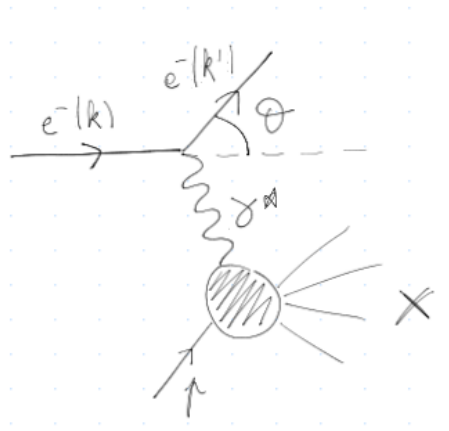


Figure 10: Diagramme de Feynman de la diffusion d'un électron sur un proton

On peut ainsi définir $q = k - k'$ l'impulsion donnée au proton.

On a $q^2 = (k - k')^2 \sim -2(k^0 k'^0 - \vec{k} \cdot \vec{k}') \sim 2k^0 k'^0(1 - \vec{n} \cdot \vec{n}')$.

D'où finalement

$$q^2 = -2k^0 k'^0(1 - \cos(\theta)) = -2k^0 k'^0 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0.$$

On pose

$$Q^2 = -q^2.$$

On peut relier cette grandeur à la "résolution de l'observation", c'est-à-dire la taille des objets observés d :

$$d \simeq r \simeq \frac{1}{Q}.$$

Grâce aux diffusions élastiques on a pu, dans les années 50, mesurer la taille du proton. Cela met en jeu les **facteurs de forme** F . Ces grandeurs décrivent la distribution de charge de la particule. Pour une particule n'ayant pas de spin il n'y en a qu'un seul. Pour une particule de spin 1/2 il y en a deux correspondant à une partie électrique et une partie magnétique.

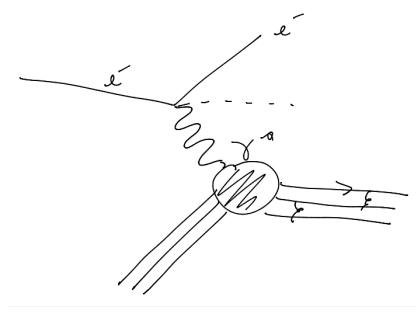


Figure 11: Schéma représentant une diffusion élastique avec l'échange de gluons

Dans les années 1970, un point de vue plus moderne sur cette collision a été apporté. On a compris que lors d'une diffusion élastique, pour que le proton puisse changer de direction tout en restant donc intact lors de la collision, ses 3 quarks doivent eux-même être tous être collectivement déviés: le photon se couple à l'un des quarks et produit sa déviation par transfert d'impulsion, et les 2 autres quarks accompagnent le mouvement par l'échange d'au moins deux gluons.

Dans ce cadre on a

$$F = \frac{\#}{Q^4}.$$

Ainsi, sachant que $\sigma \propto F^2$, si on apporte une grande énergie ($Q \gg 1$) on a $\sigma \ll 1$. Néanmoins, cela n'est pas observé expérimentalement lors d'une diffusion inélastique: la section efficace est tout sauf négligeable. Un autre mécanisme doit être invoqué.

En effet, on a par la suite compris que la collision ne s'effectuait pas sur le proton mais sur un seul des trois quarks qui le composent. Le quark dévié porte une portion de l'impulsion totale du proton xp avec $0 < x \leq 1$.



Figure 12: Diagramme de Feynman de la diffusion

Cette portion d'impulsion est mesurable. On a, par notre approximation, $(xp)^2 \sim (xp + q)^2 \sim 0$. C'est-à-dire, $q^2 + 2xp \cdot q = 0$. On définit finalement $x_{\text{Bjorken}} := \frac{Q^2}{2p \cdot q}$ qui est expérimentalement mesurable car est égal à x . On peut l'exprimer en fonctions d'une variable de Mandelstam:

$$x_{\text{Bjorken}} = \frac{Q^2}{s + Q^2}.$$

Pour notre étude on se place dans la **limite de Regge**, c'est-à-dire $x_{\text{Bjorken}} \rightarrow 0$ à Q^2 fixé. Dans cette limite on étudie le cas critique où les partons sondés portent une fraction de plus en plus faible de l'impulsion du proton. C'est dans ce cadre que l'équation de Balitsky Kovchegov, objet d'étude de ce stage, décrit les effets de saturation gluonique.

On a $x_{\text{Bjorken}} = \frac{Q^2}{2p \cdot q}$ et $s = 2p \cdot q - Q^2$. Ainsi cette limite revient à $s \gg Q^2$. On est donc placé à une limite à **très haute énergie**. [6]

On admet que l'on peut relier la rapidité à x par:

$$\eta \simeq \frac{1}{x}.$$

V.3 Résultats connus

Les collisions élastiques ont d'abord permis, dans les années 1950, de mesurer la taille des protons. A la fin des années 60, à SLAC, les collisions profondément inélastiques ont donné accès au contenu interne (quarks à l'époque) du proton.

Pouvoir mesurer x permet d'accéder à la *fonction de distribution des partons* (PDF), qui est un élément essentiel à la compréhension de la constitution du proton. Une PDF notée $f_i(x, Q^2)$ modélise la probabilité de trouver, à l'énergie Q^2 , le parton i portant une fraction x de l'impulsion du proton.

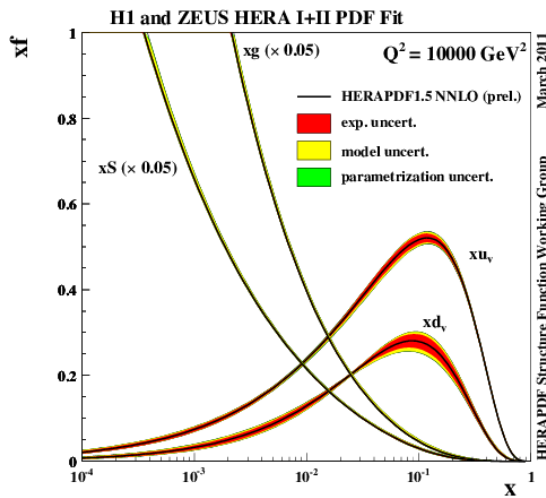


Figure 13: PDFs obtenues par HERAPDF1.5

Les expériences au CERN (EMC, BCDMS) et plus tard au HERA (Hadron Elektron Ring Anlage, via les expériences H1 et ZEUS) ont révélé l'importance croissante des gluons à petit x . La figure 14 montre clairement cette domination gluonique aux petites valeurs de x .

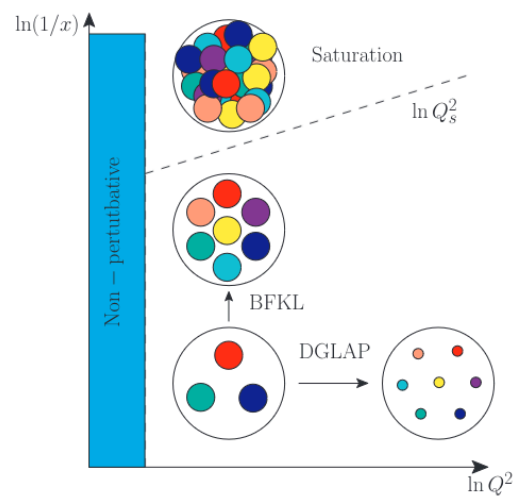
On observe dans Figure 13 l'évolution de la PDF des gluons au sein du proton, notée xg . À petit x , les gluons deviennent dominants. On souhaite explorer tout particulièrement ce domaine des très petits x , en essayant d'atteindre des valeurs extrêmement faibles, tout en examinant la dépendance en Q^2 .

V.4 Résultats attendus

À rapidité fixée, la densité de parton augmente avec Q^2 mais leur taille diminue. Cette évolution est décrite par le modèle DGLAP (Dokshitzer–Gribov–Lipatov–Altarelli–Parisi).

On s'intéresse ici à l'évolution en fonction de la rapidité à Q fixé. À très haute énergie (s très grand, i.e. x très faible), on s'attend à observer d'autres interactions, notamment intergluoniques.

On révèle aussi une augmentation significative du nombre de gluons présents dans le proton. Les gluons observés ont une taille d'environ $\frac{1}{Q}$. Si l'on maintient Q^2 assez faible (tout en restant perturbatif, donc grand devant Λ_{QCD}^2), et que l'on diminue fortement x (i.e. $\ln \frac{1}{x}$ très grand), on aura une situation où les gluons seront tellement grands et nombreux qu'ils ne pourraient rester contenus dans le proton.



Cela n'est évidemment pas une situation possible physiquement. On s'attend donc à observer une **saturation gluonique** par un effet de recombinaison des gluons. Cela est illustré dans la figure ci-dessus [7].

VI L'équation de Balitsky-Kovchegov

L'équation de Balitsky-Kovchegov est dérivée dans la limite de grande énergie de la QCD, en régime perturbatif. Elle décrit l'évolution en rapidité de l'amplitude de diffusion S d'un dipôle couleur sur une cible hadronique. Elle est donnée par:

$$\frac{\partial S_{x_\perp, y_\perp}(\eta)}{\partial \eta} = \frac{\bar{\alpha}_S}{2\pi} \int d^2 \bar{z}_\perp \mathcal{M}_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp, \bar{z}_\perp} (S_{\bar{x}_\perp, \bar{z}_\perp}(\eta) S_{\bar{z}_\perp, \bar{y}_\perp}(\eta) - S_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp}).$$

où $\bar{\alpha}_S$ est la constante de couplage de l'interaction forte,⁸ et η est la rapidité du dipôle. [8], [9]

S est l'amplitude totale du dipôle. Elle prend en compte toutes les issues possibles de la collision, y compris celles où il n'y a pas d'interaction. On définit alors $N = 1 - S$ comme l'amplitude du dipôle. Ainsi quand $N = 0$ il n'y a pas d'interaction, et quand $N = 1$ il y a absorption totale du dipôle par le proton. Pour les tracés, on utilisera plutôt N : $N_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp}$ désigne la probabilité d'interaction entre la paire $q\bar{q}$ de taille $r = |\bar{r}_\perp| = |\bar{x}_\perp - \bar{y}_\perp|$ et le proton.

$\mathcal{M}$ est ce qu'on appelle le *noyau d'évolution du dipôle*. Cette grandeur est égale à la probabilité que le dipôle émette un gluon à la position z et se subdivise. On a:

$$\mathcal{M}_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp, \bar{z}_\perp} = \frac{(\bar{x}_\perp - \bar{y}_\perp)^2}{(\bar{x}_\perp - \bar{z}_\perp)^2 (\bar{z}_\perp - \bar{y}_\perp)^2}.$$

Dans l'équation BK, on considère la création de dipôles en cascade. On somme sur toutes les positions où l'on peut créer un dipôle. Le dipôle originel en x, y se scinde en un dipôle en x, z et un dipôle en z, y . $N_{\bar{x}_\perp, \bar{z}_\perp} = S_{\bar{x}_\perp, \bar{z}_\perp} - 1$ et $N_{\bar{z}_\perp, \bar{y}_\perp} = S_{\bar{z}_\perp, \bar{y}_\perp} - 1$ sont donc la probabilité d'interaction des nouveaux dipôles et $N_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp} = S_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp} - 1$ celle du dipôle initial.

VII Résolution de l'équation BK

Pour la résolution numérique de l'équation BK, on s'appuie sur les travaux de Cougoulic, Korcyl et Stebel [8]. Ces trois auteurs ont établi une méthode de résolution à l'aide de différentiation automatique. Dans un premier temps, on appliquera la méthode d'Euler aux conditions initiales choisies par [8] *via* les constantes qu'ils ont choisies. Ensuite, on comparera nos résultats avec ceux issus de la différentiation automatique implémentée.

VII.1 Définitions

On définit pour la suite différentes constantes, ce sont pour la plupart des paramètres de modélisation dont on fixe les valeurs. On choisit ici les mêmes valeurs que Cougoulic, Korcyl et Stebel.

On a notamment:

$$\Lambda = 0.241, \alpha_s^{\text{frozen}} = 0.7, C = 3.8078, b_0 \simeq 0.716, r_{\text{max}} = \frac{2C}{\Lambda} \exp\left(-0.5(\alpha_s^{\text{frozen}} b_0)^{-1}\right)$$

où b_0 est un coefficient défini en chromodynamique quantique.

⁸On notera qu'en réalité cette grandeur n'est pas constante. Elle évolue selon les énergies mises en jeu. Voir notamment la notion de liberté asymptotique.

Afin de résoudre l'équation différentielle selon r_z il est plus aisé de passer par les coordonnées radiales.

Néanmoins, Cougoulic, Korcyl et Stebel ont choisi d'utiliser une version de l'équation BK apportant plus de précisions. Considérant notamment l'évolution de la constante de couplage α_s dont l'expression est donnée par

$$\alpha_s(r) = \theta(r - r_{\max})\alpha_s^{\text{frozen}} + \theta(r_{\max} - r) \times 2b_0 \log\left(\frac{2C}{r\Lambda}\right)$$

On implémente également deux “décalages” de la rapidité:

$$\delta_{r_z;r} = \max\left\{0, 2 \log\left(\frac{r}{r_z}\right)\right\} \quad \text{et} \quad \delta_{r_{zy};r} = \max\left\{0, 2 \log\left(\frac{r}{r_{zy}}\right)\right\}.$$

On peut voir leur définition dans la fonction de prototype `double integrand(double eta, double r, double rz, double phi)`.

On obtient et implémente alors l'équation (4) de [8]:

$$\frac{\partial S(r, \eta)}{\partial \eta} = \int d\varphi dr_z r_z \left[\frac{\bar{\alpha}_s(r)}{2\pi r_z^2} \left(\frac{r^2}{r_{zy}^2} + \frac{\bar{\alpha}_s(r_z)}{\bar{\alpha}_s(r_{zy})} - 1 + \frac{r^2}{r_{zy}^2} \left(\frac{\bar{\alpha}_s(r_{zy})}{\bar{\alpha}_s(r_z)} - 1 \right) \right) \right]$$

VII.2 Conditions choisies

On choisit ici la même condition initiale que Cougoulic, Korcyl et Stebel qui est le modèle M-V (McLerran, Venugopalan), donné par:

$$S(r, \eta = 0) = \exp\left(-r^2 Q_0^2 \log\left(\frac{1}{r\Lambda} + e\right)\right).$$

VII.3 Méthode naïve

Dans une première implémentation fournie, on applique une méthode “naïve”. Elle contient trois fichiers, `main.c` et deux fichiers de calculs mathématiques: `integration.cpp` et `interpolation.cpp` ici utilisés comme simples outils.

Cette méthode consiste en l'itération de deux étapes majeures: l'évaluation de l'intégrale, puis la résolution de l'équation différentielle d'ordre 1 obtenue par la méthode d'Euler. On itère ces deux étapes pour les différentes valeurs de η et de r .

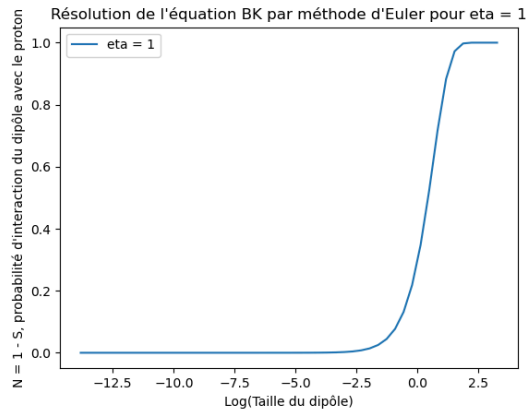
Le calcul de l'intégrale se fait à l'aide des fonctions de `integration.cpp`. Et l'application de la méthode d'Euler est donnée par: `Stable[j+1][i] = Stable[j][i] + delta_eta * DS_Deta.`

Pour les différents graphiques, on trace $N = 1 - S$ en fonction du logarithme de la taille du dipôle pour une meilleure visibilité.

VII.3.1 À η fixe

On trace dans un premier temps N à $\eta = 1$.

On observe que la taille du dipôle a un rôle important dans la probabilité d'interaction: pour un petit dipôle, on n'en a quasiment aucune. On peut comprendre cela par le fait qu'un dipôle est constitué d'un quark d'une couleur et d'un antiquark de l'anticouleur. Ainsi, si le dipôle est petit le quark et l'antiquark sont très proches: le proton voit une particule de couleur nulle. Il n'y a que très peu d'interaction.

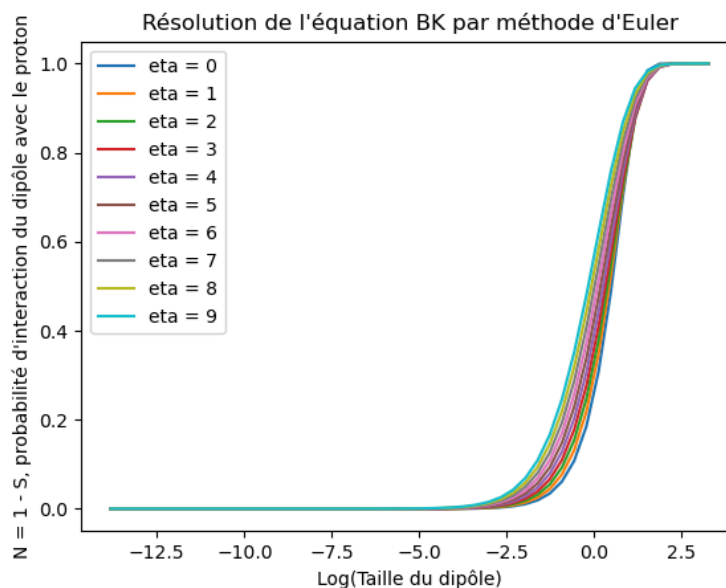
Figure 15: N en fonction de r à $\eta = 1$

On remarque également que la probabilité d'interaction tend vers 1, et ce pour η fixé. Cela est étonnant car on a précédemment vu que la densité gluonique augmentait avec η , dynamique décrite par l'équation de Balitsky-Kovchegov. Il semble qu'il y a tout de même une augmentation de la densité au sein du proton, sous-entendant une saturation gluonique par effets intrinsèques au proton. On arrive à un état de saturation: c'est ce qu'on appelle le *black disk*. Le dipôle incident n'a pas moyen de le traverser.

VII.3.2 Avec l'évolution de η

On applique cette fois-ci la résolution pour différentes valeurs de η .

On observe que pour un η plus important, la saturation se fait pour des dipôles plus petits. Le système est dense pour de plus petits dipôle: plus on apporte d'énergie avec la collision, plus l'effet de saturation a lieu tôt. Cela sous-entend donc que, si on souhaite observer la saturation pour de plus petites valeurs de rapidité (et donc moins d'énergie fournie), on pourrait prendre des échantillons plus lourds comme certains ions.

Figure 16: N pour différentes valeurs de η

VII.4 Méthode de différentiation automatique

Dans leur article, Cougoulic, Korcyl et Stebel introduisent une autre méthode de calcul: la différentiation automatique. On utilise ici le code fourni avec l'article [source]. On observe la même tendance, même si la différence entre les valeurs de η est moins marquée.

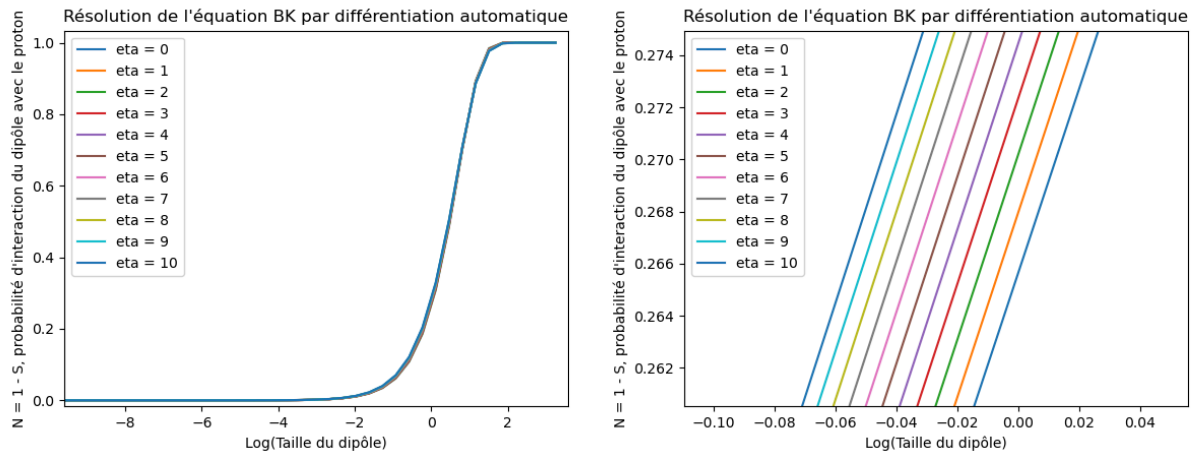


Figure 17: Résolution AD : vue générale (gauche) et zoom (droite)

Cette différence nette entre les deux méthodes de calcul n'est tout de même pas négligeable. On trace en Figure 18 la différence entre les résultats des deux méthodes.

On a aussi différence étonnamment conséquente dans les temps d'exécution: pour dix itérations (dix valeurs de η) la méthode d'Euler s'exécute en 53 minutes et 49 secondes, contre 10 secondes pour la différentiation automatique.

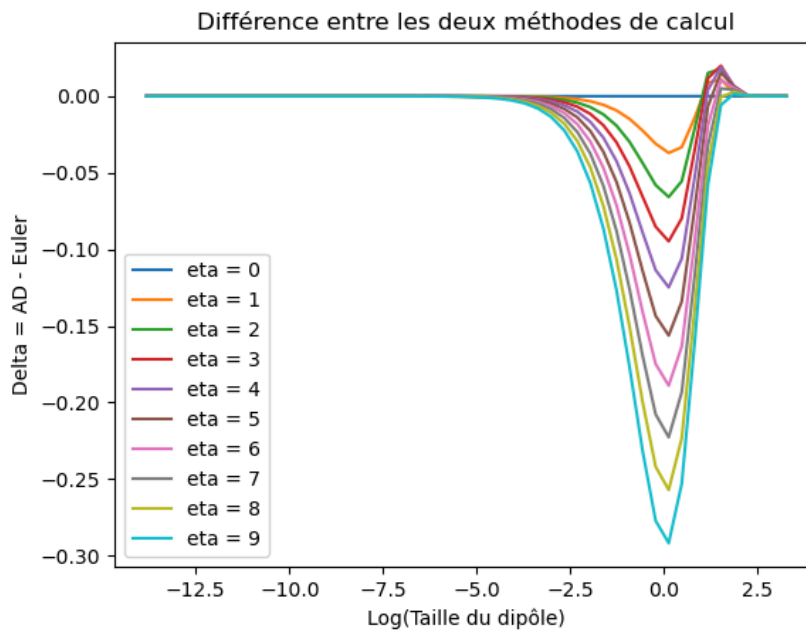


Figure 18: Différence entre les deux implémentations.

On observe que l'écart entre les deux calculs augmente lorsque la taille du dipôle s'approche de 1. Cela semble montrer qu'il y a ici une taille critique, point de bascule vers la saturation.

VIII Conclusion

Ce stage a permis d'étudier les phénomènes de saturation gluonique dans le proton à travers la résolution numérique de l'équation de Balitsky-Kovchegov. Les deux implémentations de résolution (Euler naïf et différentiation automatique) modélisent les comportements attendus de la saturation gluonique. On observe le régime saturé pour de grands dipôles, l'amplitude d'interaction N tend vers 1 avec la taille du dipôle. Cela confirme l'apparition du "disque noir" prédit théoriquement, et caractérisant la saturation gluonique. L'évolution avec la rapidité révèle que l'augmentation de η conduit à une saturation pour des dipôles de plus en plus petits, reflétant l'augmentation de la densité gluonique avec l'énergie. Enfin, concernant les performances computationnelles, la méthode de différentiation automatique s'avère plus efficace (facteur 300) que l'approche naïve, tout en offrant une meilleure précision numérique.

On pourrait améliorer cette étude, en effectuant plus de comparaisons entre les deux méthodes de calcul. A-t-on toujours un tel écart entre les méthodes ? Est-il systématique ou dépend-il des conditions de calcul ? Il serait également intéressant d'étudier l'échelle de saturation, et de la faire apparaître sur les graphiques. Ce sont deux points que je n'ai pas eu le temps d'étudier.

Au delà du côté scientifique, ce stage m'a également apporté sur le plan personnel. J'ai découvert dans ce cadre le monde de la recherche en physique théorique. J'ai notamment compris que la démarche de la recherche n'est pas linéaire. On n'avance pas régulièrement mais par à-coups. Dans le cadre, j'ai découvert de nouvelles choses qui m'ont fait avancer par un déclic, alors que j'avais du mal à avancer au départ. J'ai pu réaliser l'impact de mes difficultés d'attention et de concentration sur mon travail, et comment je pourrais y faire face et/ou l'utiliser comme une force plus tard.

IX Remerciements

Je souhaiterais tout d'abord remercier Samuel Wallon et Michael Fucilla, pour leur accompagnement et leurs réponses à mes interrogations durant ce stage. Mais aussi de m'avoir ouvert la voie vers la physique théorique. Merci également à Benoit Blossier et MÉRIL Reboud qui ont pu organiser mon accueil au début de mon stage et à Nicolas Crépet d'avoir accepté ma compagnie dans son bureau durant son stage de M2. Enfin, je souhaiterais remercier Chloé Mullaert, Claire Bonnoit-Chevalier, Claire Chevalier et Olivier Bouverot qui ont, peut-être sans le savoir, fait grandir ma curiosité pour les mathématiques et la physique au cours de mes deux années de classe préparatoire, et sans qui je ne serais pas au Magistère de Physique Fondamentale aujourd'hui.

Bibliographie

- [1] M. Thomson, *Modern Particle Physics*. Cambridge University Press.
- [2] L. Collaboration, "Measurement of the running of the electromagnetic coupling at large momentum-transfer at LEP," 2005.
- [3] I. et Irfu, "Les mystères du proton." [Online]. Available: <https://www.ijclab.in2p3.fr/actualite/ijclab-vous-presente-les-mysteres-du-proton/>
- [4] E. Iancu, A. Leonidov, and L. McLerran, "The colour glass condensate: an introduction," Feb. 2002.
- [5] W. Appel, *Mathématiques pour la physique et les physiciens*. H&K.
- [6] J. Bartels, "Low-x Physics in Deep Inelastic Scattering and the Regge Limit in QCD - Summer School on Hadronic Aspects of Collider Physics, Zuoz, Switzerland," Aug. 1994.
- [7] M. Fucilla, "Towards the next-to-next-to-leading formulation of the BFKL approach." 2023.

- [8] F. Cougoulic, P. Korcyl, and T. Stebel, “Improving the solver for the Balitsky-Kovchegov evolution equation with Automatic Differentiation,” Nov. 2024.
- [9] H. Mäntysaari, “Balitsky-Kovchegov equation,” Nov. 2011.
- [10] M. Vaculciak, J. G. Contrerasa, and J. Cepilaa, “Role of rapidity choice for the impact-parameter dependent Balitsky-Kovchegov equation,” Jan. 2023.
- [11] S. Wallon, “Introduction aux Théories de Jauge Non Abéliennes et à la Chromodynamique Quantique Perturbative.” 2008.

A Annexe 1: Antiparticules, équation de Klein-Gordon

A.1 Opérateurs

A.1.1 Opérateurs ∂_μ et ∂^μ

On a

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \right) = (\partial_0, \vec{\nabla}) = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$$

La notation contravariante de cet opérateur est la suivante:

$$\partial^\mu = \partial_\mu g^{\mu\nu} = (\partial_0, -\vec{\nabla})$$

où $g_{\mu\nu}$ est la métrique de Minkowski dans la convention de la physique des particules, c'est-à-dire:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A.1.2 Opérateur d'Alembertien $\square$

On définit l'opérateur d'Alembertien à partir de l'équation de d'Alembert, équation de propagation du champ électrique dans le vide:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \Delta \vec{E} = \vec{0}.$$

Proposition

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu$$

Preuve D'après les propriétés précédentes, on a:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \partial^\mu &= (\partial_0, \vec{\nabla}) (\partial_0, -\vec{\nabla}) \\ &= \partial_0^2 - (\vec{\nabla})^2 \\ &= \partial_t^2 - \Delta. \end{aligned}$$

D'où

$$\square = \partial_\mu \partial^\mu.$$

A.2 Équation de Klein-Gordon

A.2.1 Énoncé

Pour une particule scalaire (*id est* sans spin), on admet l'équation dite de Klein-Gordon donnée par:

$$\square \varphi + m^2 \varphi = 0$$

A.2.2 Onde plane

Soit $\varphi(x) = N e^{-i P X}$, une onde plane. Appliquons Klein-Gordon à cette onde plane.

On a

$$\begin{aligned}\partial^\mu e^{-iPX} &= \partial^\mu e^{-iP^\nu X_\nu} \\ &= -iP^\mu.\end{aligned}$$

Puis

$$\square e^{-iPX} = \partial_\mu \partial^\mu e^{-iPX} = \partial_\mu (-iP^\mu)$$

D'où

$$\square e^{-iP.X} = (-i)^2 P_\mu P^\mu = -P^2.$$

Et finalement, l'application de Klein-Gordon à notre onde plane donne

$$\square \varphi + m^2 \varphi = N(m^2 - P^2)e^{-ip.x} = 0$$

D'où

$$p^2 = m^2 \Leftrightarrow E = P^0 = \pm \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$$

On a des solutions d'énergie positive et d'énergie négative, impliquant une énergie fondamentale non bornée !

On peut réinterpréter les énergies négatives comme des particules de charge $-q$ et d'énergie $-E$. Si on écrit l'expression de l'onde plane on remarque que:

$$\begin{aligned}e^{-iPX} &= e^{-i(Et - \vec{p} \cdot \vec{x})} \\ &= e^{-i(-E(-t) - \vec{p} \cdot \vec{x})}.\end{aligned}$$

L'évolution temporelle de l'onde plane est la même pour une particule d'énergie E que pour une particule d'énergie $-E$ qui remonte le temps. L'existence des *antiparticules* est donc adéquate à notre théorie.

On fait figurer une antiparticule dans un diagramme de Feynman comme sa particule associée qui évolue vers le passé.

B Annexe 2: Représentations fondamentale et antifondamentale

Pour $N = 2$: On peut décrire $SU(2)$ comme suit:

$$SU(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix} : \alpha, \beta \in \mathbb{C} : |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}.$$

Soit $g \in SU(2)$. Il existe donc $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ tels que $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ et $g = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{\beta} \\ \beta & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$.

Soit également $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$. On note D et $\bar{D}$ les représentations fondamentale et antifondamentale de $SU(2)$. On a $D : SU(N) \rightarrow GL(N, \mathbb{C}), g \mapsto g$ et $\bar{D}(g) = \bar{g}$.

Ainsi,

$$\varepsilon^{-1} D(g) \varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} g \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \bar{g}.$$

Soit

$$\varepsilon^{-1} D(g) \varepsilon = \bar{D}(g).$$

Ainsi pour $N = 2$ les représentations fondamentale et antifondamentale sont équivalentes.

$$\text{Pour } N > 2: \text{ Soit } g = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-i\theta/(N-1)} & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{-i\theta/(N-1)} \end{pmatrix}.$$

On a bien $g \in SU(N)$.

Deux représentations d'un groupe fini G de dimension $n \in \mathbb{N}$ sont équivalentes si et seulement si les matrices associées sont semblables. Or la trace est un invariant de similitude.

On a

$$\begin{cases} \text{Tr}(D(g)) = e^{i\theta} + (N-1)e^{-i\theta/(N-1)} \\ \text{Tr}(\overline{D}(g)) = e^{-i\theta} + (N-1)e^{i\theta/(N-1)} \end{cases}$$

Ainsi $\text{Tr}(D(g)) \neq \text{Tr}(\overline{D}(g))$.

Les représentations fondamentale et anti fondamentale ne sont donc pas équivalentes pour $N > 2$.

□

C Annexe 3: Code de la méthode d'Euler

```
//Example initial conditions p6
const double Q02 = 6. * 0.104;
const double Lambda = 0.241;

//Following values come from page 3 of the article
const double EPS = pow(10., -7); //regularisation to avoid rzy = 0. described p3

const double alphaS_freezed = 0.7;
const double b0 = 0.716;
const double C = 3.8078;
const double rmax = 2.*C/Lambda * exp(-0.5/(alphaS_freezed * b0));

const double logr_min = -13.8155;
const double logr_max = 3.60517;
const double N_r = 50; //100

const double eta_min = 0.;
const double eta_max = 10.;
const double N_eta = 10; // 20

// function declarations
double alphaS(double r); //eq 5
double S0(double r);
double S(double eta, double r);
double integrand(double eta, double r, double rz, double phi);

double S0(double r) { // Equation 10
    return exp(-1./4.*r*r*Q02*log(exp(1.) + 1./(r*Lambda)));
}

double S(double eta, double r) {
    if (eta == 0.) return S0(r);
```

```

    return interp_S.interp(eta, log(r));
}

double alphaS(double r) { //eq 5
    if (r >= rmax) return alphaS_freezed;
    return 1./(2.*b0*log(2.*C/(r*Lambda)));
}

double integrand(double eta, double r, double rz, double phi) {
    //page 3
    double rzy = sqrt(r*r + rz*rz - 2.*r*rz*cos(phi) + EPS);
    double delta_rz = fmax(0., 2.*log(r/rz));
    double delta_rzy = fmax(0., 2.*log(r/rzy));

    double eta1 = eta - delta_rz;
    if (eta1 < 0.){
        eta1 = 0.;
    }

    double eta2 = eta - delta_rzy;
    if (eta2 < 0.){
        eta2 = 0.;
    }

    //Eq (4)
    double res = alphaS(r)/(2.*M_PI)*( pow(r/rzy,2) + alphaS(rz)/alphaS(rzy) - 1. +
    pow(rz/rzy,2)*(alphaS(rzy)/alphaS(rz) - 1.) ) * (S(eta1, rz)*S(eta2, rzy) - S(eta,
    r));

    return res;
}

Poly2D_interp interp_S;

int main(int argc, char *argv[])
{
    std::cout << "Loading integration tables ..." << std::endl;
    Integrator2D* integrator2D = new Integrator2D("tables/integration/2d");
    int num_int2D_tables = integrator2D->num_tables();

    double delta_r = (logr_max - logr_min)/((double) N_r);
    double delta_eta = (eta_max - eta_min)/((double) N_eta);

    std::vector<double> eta_table;
    std::vector<double> logr_table(N_r);
    Mat2Ddouble Stable; //Type described in nrdef.h
    Stable.resize(N_eta+1, std::vector<double>(N_r));

    std::ofstream outfile("output.txt");

    // initialization
    for (int i = 0; i < N_r; i++) {
        double logr = logr_min + i * delta_r; //Initialisation with log values so
that they are

```

```

// exact later
    logr_table[i] = logr; // logr_table[i] = logr_min + i * delta_r
    Stable[0][i] = S0(exp(logr)); //We dont need the log for init with S0

    outfile << eta_min << " " << logr_table[i] << " " << Stable[0][i] <<
std::endl; //OUTPUT FILE
    // eta min log(chosen_value) S0(chosen_value)
}

eta_table.push_back(eta_min); // "Start" eta table with its starting value:
eta_min
    for (int j = 1; j < N_eta+1; j++) for (int i = 0; i < N_r; i++) Stable[j][i] =
0.; // Stable all 0

std::cout << "Solving the evolution equation ..." << std::endl;
for (int j = 0; j < N_eta; j++) {
    double eta = eta_min + j * delta_eta;
    std::cout << j << " debug: eta = " << eta << std::endl;

    for (int i = 0; i < N_r; i++) {
        cout << i << endl;
        double logr = logr_min + i * delta_r;

        auto integrand_1 = [&](double logr, double phi){return integrand(eta,
exp(logr), exp(logr), phi); };
        double DS_Deta = 2.*integrator2D->Integrate(integrand_1, logr_min,
logr_max, 0., M_PI, num_int2D_tables-1, num_int2D_tables, 0.001);

        Stable[j+1][i] = Stable[j][i] + delta_eta*DS_Deta; //Euler scheme

        outfile << eta + delta_eta << " " << logr << " " << Stable[j+1][i] <<
std::endl;
    }
    eta_table.push_back(eta + delta_eta);
    interp_S = Poly2D_interp(eta_table, logr_table, Stable, 2, 2);

}

outfile.close();
/*
std::cout << "debug: eta, logr, S: " << eta_table[1] << " " << logr_table[70] <<
" " << Stable[1][70] << " ";
std::cout << interp_S.interp(eta_table[1]-0.01, logr_table[70]) << std::endl;
*/

return 0;
}

```