

Étude des effets de saturation gluonique dans le proton à haute énergie

Sous la direction de S. Wallon et M. Fucilla

25.09.2025

1	Introduction	4
1.a	Nucléons, quarks et gluons	5
1.b	Interaction forte	6
2	Contexte théorique	7
2.a	Groupe $SU(N)$	8
2.b	Représentations	9
2.c	Fondamentale vs antifondamentale	10
2.d	Représentation adjointe	11
2.e	Représentation graphique	12
2.f	Démultiplication des dipôles	13
3	Collisions	15
3.a	Sondage de particules	16
3.b	Collisions profondément inélastiques	17
3.c	Résultats connus par DIS	19
4	Équation de Balitsky-Kovchegov	20
4.a	Énoncé	21

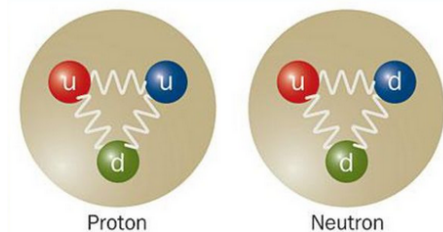
5	Résolution informatique	22
5.a	Réécriture de l'équation	23
5.b	Méthode d'Euler	24
5.c	Pour $\eta = 1$, fixé	25
5.d	Évolution avec η	26
5.e	Différentiation automatique	27
5.f	Écart entre les deux méthodes	29
6	Conclusion	30

1 Introduction

Nucléons, quarks et gluons

5 / 30

Nucléons: particules composées de trois quarks

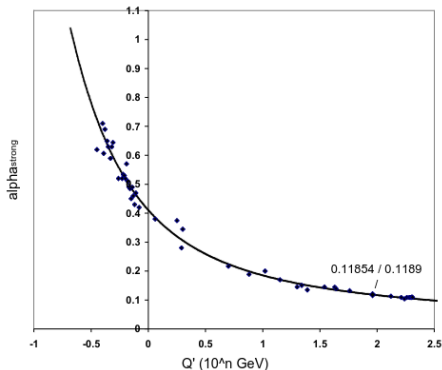


Quarks: six particules élémentaires

	1 ^{ÈRE} GÉNÉRATION	2 ^{ÈME} GÉNÉRATION	3 ^{ÈME} GÉNÉRATION
masse →	≈2.3 MeV/c ²	≈1.275 GeV/c ²	≈173.07 GeV/c ²
charge →	2/3	2/3	2/3
spin →	1/2	1/2	1/2
	u up	c charm	t top
QUARKS	≈4.8 MeV/c ²	≈95 MeV/c ²	≈4.18 GeV/c ²
	-1/3	-1/3	-1/3
	d down	s strange	b bottom

Gluons: particules médiatrices de l'interaction forte, responsable de la cohésion des nucléons

Partons: éléments de la “soupe élémentaire” ie quarks, antiquarks et gluons.



- Comportement contre-intuitif: plus les quarks sont éloignés, plus l'interaction est forte !
- Énergie caractéristique: Λ_{QCD} .
- $Q \gg \Lambda_{\text{QCD}}$ ie très haute énergie: α_s décroît
- $Q \ll \Lambda_{\text{QCD}}$ divergence

2 Contexte théorique

Définition

Le groupe $SU(N)$, $N \in \mathbb{N}$ est le groupe des matrices unitaires de déterminant 1.

Théorie de jauge de la QCD basée sur $SU(3)$.

Propriété

C'est un groupe de Lie de dimension $N^2 - 1$.

Structure d'un groupe de Lie -> Calcul différentiel possible

Intuition

Dans $(\mathbb{Z}, +)$:

$$1 + 1 = 2$$

Dans $(\mathbb{Z}/(2\mathbb{Z}), +)$:

$$1 + 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Soit G et G' deux groupes finis et V un $\mathbb{K}ev$ de dimension d . φ est une représentation de G par G' si c'est un morphisme de G dans G' .

On dit qu'elle est **linéaire** lorsque $G' = GL(V)$ et sa dimension est dans ce cas égale à $\dim V$.

Définition

On appelle représentation **fondamentale** la représentation linéaire $D : g \mapsto g$. Son conjugué est la représentation **antifondamentale**.

Fondamentale vs antifondamentale

10 / 30

Représentation fondamentale de $SU(3)$ -> transformation des quarks q .

Dimension 3 -> 3 couleurs de quarks rouge, vert, bleu.

Définition

Deux représentations φ et φ' d'un groupe G sont dites équivalentes si et seulement si il existe S inversible tel que $\forall g \in G, \varphi'(g) = S^{-1}\varphi(g)S$.

Propriété (preuve en annexe)

Les représentations fondamentale et antifondamentale de $SU(3)$ ne sont pas équivalentes.

-> Antiquarks !

Une paire $q\bar{q}$ forme un **dipôle de couleur**.

Définition

Soit G un groupe de Lie. Soit $g \in G$, en différentiant selon l'identité I on obtient: $g(\theta_1, \theta_2, \dots) \simeq I - it^a \theta^a$. L'**algèbre de Lie** $\mathfrak{g}$ est $Vect(t^i)$ muni d'un crochet de Lie, et respectant l'identité de Jacobi. Les t^i sont les générateurs de $\mathfrak{g}$.

Nombre de particules médiatrices de l'interaction associée au groupe G =
Dimension de la représentation adjointe = Dimension de G .

Interaction forte: $Dim(SU(3)) = 3^2 - 1 = 8 \Rightarrow 8$ gluons différents !

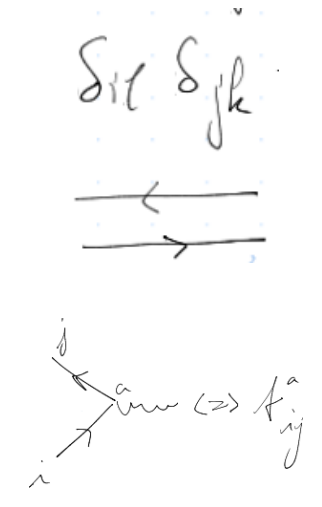
Propriété

$$[t^a, t^b] = if^{abc}t^c \Rightarrow \text{Interactions intergluoniques.}$$

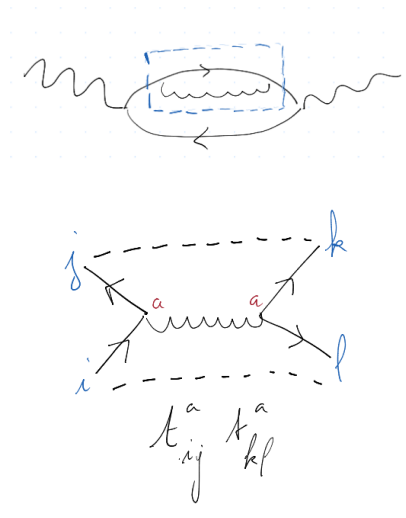
Représentation graphique

12 / 30

Paire $q\bar{q}$ et générateurs t_{ij}



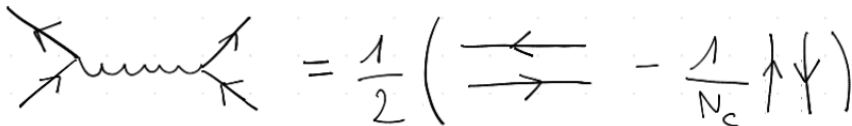
Mécanisme d'émission gluonique



Propriété - Identité de Fierz

$$t_{ij}^a t_{kl}^a = \frac{1}{2} \left(\delta_{il} \delta_{jk} - \frac{1}{N} \delta_{ij} \delta_{kl} \right)$$

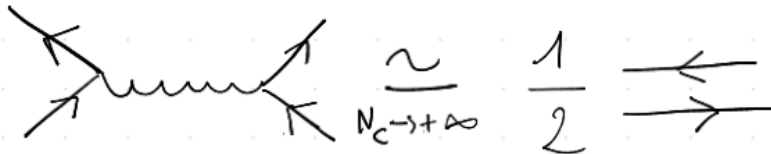
Graphiquement


$$= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \leftarrow \\ \rightarrow \end{array} - \frac{1}{N_c} \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} \right)$$

Démultiplication des dipôles (ii)

14 / 30

Limite du **modèle dipolaire**: $N \rightarrow +\infty$:



Donc on peut écrire:



3 Collisions

Sondage de particules

16 / 30

D'après DE BROGLIE,

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

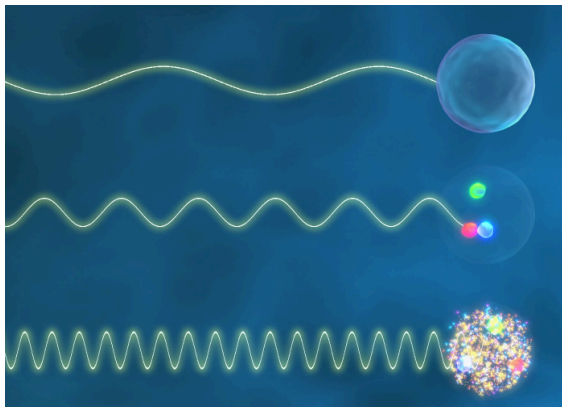
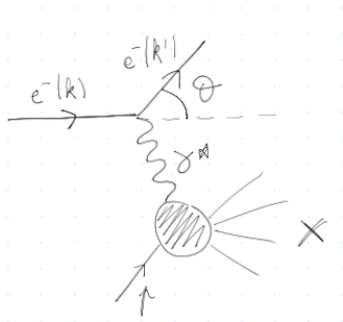


Figure 5: Augmentation de la résolution avec l'énergie

$e^- \rightsquigarrow \gamma^*$ qui fluctue en $q\bar{q}$ (dipôle de couleur de taille r)



Soit q l'impulsion donnée au proton.

On pose

$$Q^2 = -q^2 > 0.$$

La résolution de l'observation est donnée par

$$d := \frac{1}{Q} \simeq r.$$

Figure 6: Diagramme de Feynman de la diffusion d'un électron sur un proton

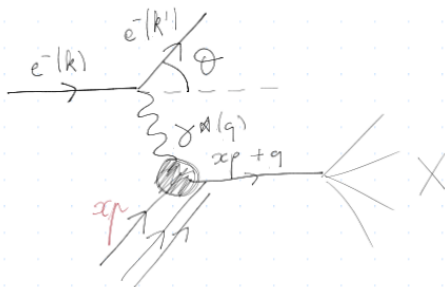


Figure 7: Diagramme de Feynman d'une DIS

Définition

On note x_{Bjorken} la portion d'impulsion portée par le quark atteint par la diffusion. Son expression est donnée par:

$$x_{\text{Bjorken}} := \frac{Q^2}{2p \cdot q} = \frac{Q^2}{s + Q^2}.$$

où $s := (p + q)^2$ ici.

Limite de Regge:

$x_{\text{Bjorken}} \xrightarrow[Q^2 \text{ fixé}]{ } 0$ ie $s \gg Q^2$. Limite à très haute énergie !

Résultats connus par DIS

19 / 30

Lien entre la rapidité et x : $\eta = \ln(1/x)$.

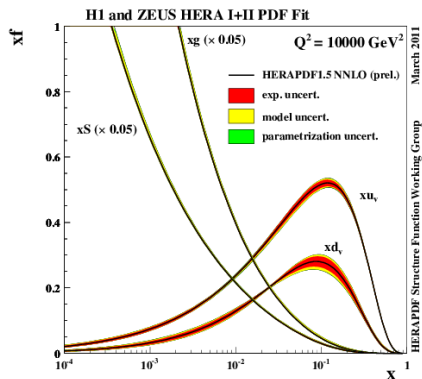


Figure 8: Résultats obtenus au HERA

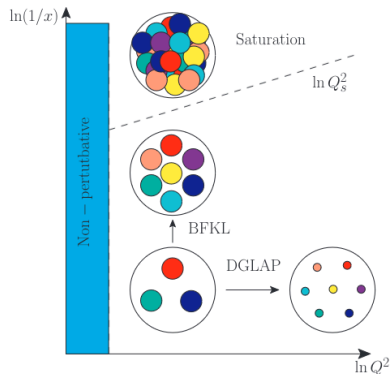


Figure 9: Évolution de la densité et de la taille des partons

4 Équation de Balitsky-Kovchegov

Équation BK

Évolution de l'amplitude de diffusion d'un dipôle de couleur de taille $r = |x_\perp - y_\perp|$:

$$\frac{\partial S_{x_\perp, y_\perp}}{\partial \eta}(\eta) = \frac{\bar{\alpha}_S}{2\pi} \int d^2 \bar{z}_\perp \mathcal{M}_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp, \bar{z}_\perp} \left(S_{\bar{x}_\perp, \bar{z}_\perp}(\eta) S_{\bar{z}_\perp, \bar{y}_\perp}(\eta) - S_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp} \right).$$

1. α_S constante de couplage de l'interaction forte;
2. $\mathcal{M}_{\bar{x}_\perp, \bar{y}_\perp, \bar{z}_\perp}$ probabilité que le dipôle émette un gluon à la position z et se subdivise;
3. $S_{x,y}(\eta)$ est l'amplitude *totale* du dipôle (x, y) à la rapidité η .

⇒ Modélisation de la création de dipôles en cascade !

5 Résolution informatique

Définition Amplitude du dipôle

$N = 1 - S$. $N = 0 \Rightarrow$ aucune interaction, $N = 1 \Rightarrow$ absorption totale du dipôle par le proton.

Apport de précisions sur le modèle:

1. Évolution de la constante de couplage
2. Décalage de rapidité

Expression implémentée:

$$\frac{\partial S(r, \eta)}{\partial \eta} = \int d\varphi dr_z r_z \left[\frac{\bar{\alpha}_s(r)}{2\pi r_z^2} \left(\frac{r^2}{r_{zy}^2} + \frac{\bar{\alpha}_s(r_z)}{\bar{\alpha}_s(r_{zy})} - 1 + \frac{r^2}{r_{zy}^2} \left(\frac{\bar{\alpha}_s(r_{zy})}{\bar{\alpha}_s(r_z)} - 1 \right) \right) \right]$$

Principe

On peut approximer la dérivée d'une fonction f et obtenir une approximation de f :

$$f'(x) \simeq \frac{f(x + \Delta t) - f(x)}{\Delta t} \Rightarrow f(x + \Delta t) \simeq f(x) + f'(x)\Delta t.$$

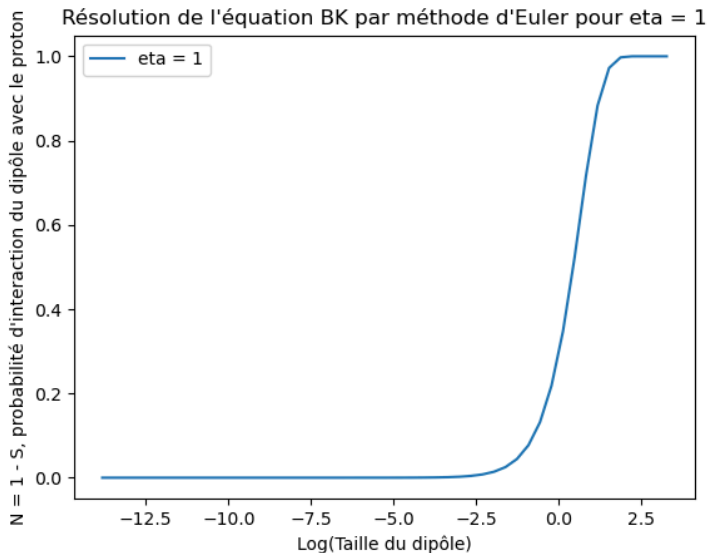
Application à l'équation BK

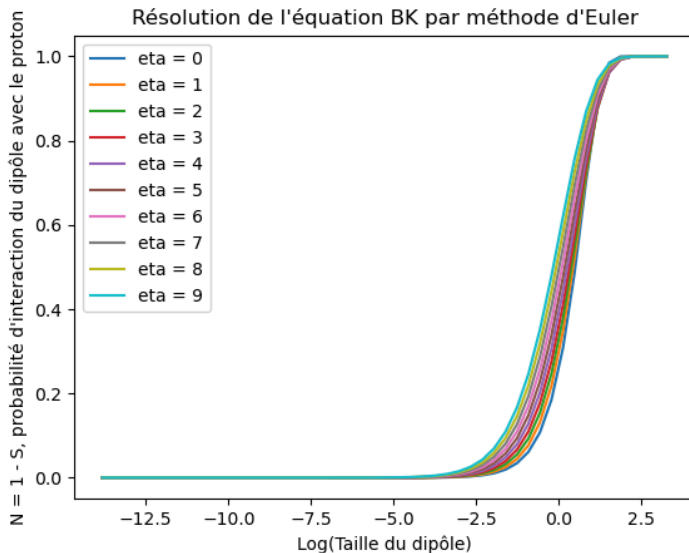
1. Calcul de l'intégrale
2. Application de la méthode d'Euler

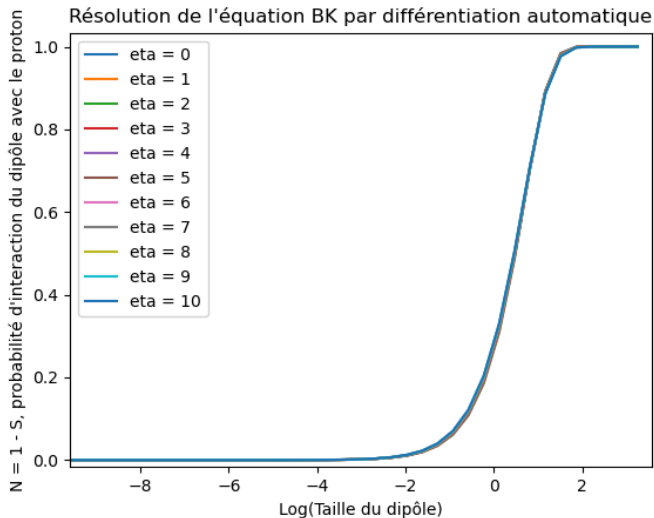
```
Stable[j+1][i] = Stable[j][i] + delta_eta*DS_Deta; //Équation  
de la méthode d'Euler
```

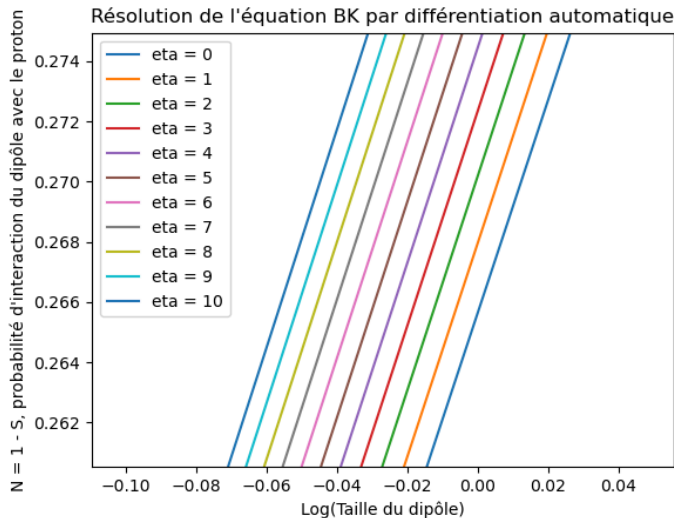
Pour $\eta = 1$, fixé

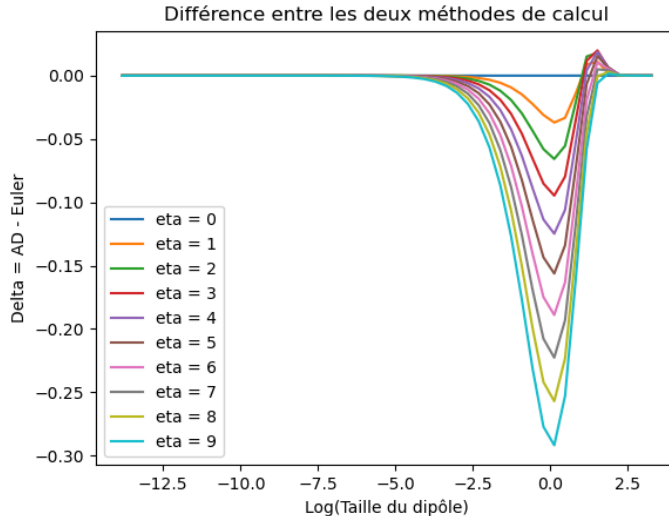
25 / 30











6 Conclusion